Test di ipotesi sulla Media

Leonardo Bizzoni

May 11, 2024

1 Con Varianza nota

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione aleatorio con distribuzione normale $N(\mu, \sigma^2)$ con media μ incognitica e varianza σ^2 nota.

1.1 Test bilatero $H_0: \ \mu = \mu_0, \ H_1: \ \mu \neq \mu_0$

Sappiamo che la media campionaria è uno stimatore puntuale non distorto di μ.

La regione critica C sarà del tipo del tipo:

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ |\overline{x_n} - \mu_0| > c)\} \text{ con } c \text{ da trovare.}$$

E la probabilità di errore di prima specie sarà:

$$P_{\mu_0}\left(\left|\overline{X_n} - \mu_0\right| > c\right) = \alpha$$

α è noto ed indica il livello di significatività del test.

Procedendo analogamente alla costruzione di un intervallo di confidenza otteniamo che $P_{\mu_0}\left(|Z \sim N(0,1)| < \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \ \rightarrow \ P_{\mu_0}\left(Z > \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha$ e che $c = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Tornando alla definizione della regione critica $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ |\overline{x_n} - \mu_0| > c)\}$ abbiamo che $|\overline{x_n} - \mu_0| > c \ \rightarrow \ \frac{|\overline{x_n} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ \rightarrow \ \frac{|\overline{x_n} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{\frac{\alpha}{2}}$ forma la zona critica $C = \left(\overline{x_n} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{x_n} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \right)$.

Ora che la zona critica C è definita possiamo stabilire se il test rifiuta H_0 (*l'unico caso significativo*). H_0 viene **rifiutato a livello** α se e solo se $\mu_0 \notin \left(\overline{x_n} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{x_n} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \right) \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in \left(\overline{x_n} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{x_n} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \right)$ (*le 2 scritture sono equivalenti*).