Estremi inferiori/superiori di confidenza

Leonardo Bizzoni

May 11, 2024

1 Estermi inferiori/superiori di confidenza della Media con varianza nota

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione aleatorio con distribuzione normale $N(\mu, \sigma^2)$ con media μ incognitica e varianza σ^2 nota.

1.1 Estremo inferiore o Intervallo destro di confidenza $100(1-\alpha)\%$

Un estremo **inferiore** indica un certo valore **sotto** cui la media μ non può prendere valore.
Questo si traduce in $P(\overline{X_n} - \mu < E) = 1 - \alpha$, dove E è il valore sotto cui μ non può essere.

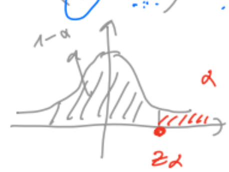
Standardizzando $\overline{X_n} - \mu$ il problema si riduce a trovare un percentile per una variabile aleatoria normale.

$$P\left(\overline{X_n} - \mu < E\right) = 1 - \alpha \ \rightarrow \ P\left(\frac{\overline{X_n}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{E}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha \text{ quindi } E = z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{da cui } P\left(\frac{\overline{X_n}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha\right) = 1 - \alpha \ \rightarrow \ P\left(\overline{X_n} - \mu < z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \ \rightarrow$$

$$P\left(\mu > \overline{X_n} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$P(Z < \dots) = 1-\alpha$



$P(Z > z_\alpha) = \alpha$

L'intervallo $\left(\overline{X_n} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty\right)$ sarà il nostro intervallo destro di confidenza $100(1-\alpha)\%$.

1.2 Estremo superiore o Intervallo sinistro di confidenza $100(1-\alpha)\%$

Un estremo **superiore** indica un certo valore **sopra** cui la media μ non può prendere valore. Questo si traduce in $P(\overline{X_n} - \mu > E) = 1 - \alpha$, dove E è il valore sotto cui μ non può essere.

Standardizzando $\overline{X_n} - \mu$ il problema si riduce a trovare un percentile per una variabile aleatoria normale.

$P\left(\overline{X_n} - \mu > E\right) = 1 - \alpha \ \rightarrow\ P\left(\frac{\overline{X_n}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{E}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha$ quindi $E = -z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(z_α *assume un valore negativo perchè una normale è centrata in* μ *e noi stiamo cercando un valore che sarà più piccolo di esso e quindi negativo*) da cui $P\left(\frac{\overline{X_n}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > -z_\alpha\right) = 1 - \alpha \ \rightarrow\ P\left(\overline{X_n} - \mu > -z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \ \rightarrow$

$$P\left(\mu < \overline{X_n} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

L'intervallo $\left(-\infty,\ \overline{X_n} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ sarà il nostro intervallo sinistro di confidenza $100(1-\alpha)\%$.

2 Estermi inferiori/superiori di confidenza della Media con varianza incognita

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione aleatorio con distribuzione normale $N(\mu, \sigma^2)$ con media μ incognitica e varianza σ^2 incognita. Utilizziamo S_n^2 come stimatore della varianza e procediamo analogamente al caso di varianza nota, con l'unica differenza che la standardizzazione $\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}} \sim t(n-1)$ è una Student con $n-1$ gradi di libertà invece della normale.

3 Estremi inferiori/superiori di confidenza della Varianza con media e varianza incognite

Equivalente al caso degli estremi di confidenza della media ma con i ragionamenti della stima per intervalli della Varianza con media incognita.