Stimatore distorto e non

Leonardo Bizzoni

May 30, 2024

Uno stimatore T per un parametro θ si dice **non distorto** (*o corretto*) se:

$$E[T] = \theta$$

1 Osservazione

La proprietà di uno stimatore di essere non distorto non è sempre mantenuta quando si applicano trasformazioni non lineari.

2 Esempi di stimatori non distorti

2.1 Media campionaria come stimatore

La media campionaria è uno stimatore non distorto consistente di:

- p in un modello bernoulliano $B(p)$ dato che $E[X \sim B(p)] = p$
- λ in un modello di Poisson $Poiss(\lambda)$ dato che $E[X \sim Poiss(\lambda)] = \lambda$
- $\frac{1}{\lambda}$ in un modello esponenziale $Exp(\lambda)$ dato che $E[X \sim Exp(\lambda)] = \frac{1}{\lambda}$
- μ in un modello normale gaussiano $N(\mu, \sigma^2)$ dato che $E[X \sim N(\mu, \sigma^2)] = \mu$
- ecc...

Questo perchè dato un campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$ considerando la media campionaria come variabile aleatoria $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ sappiamo che $E[\overline{X_n}] = E[X_i]$ (*dimostrazione*)

La media campionaria è sempre uno stimatore consistente in quanto $\lim\limits_{n \to +\infty} Var[\overline{X_n}] = \frac{\sigma^2}{n} = 0$ (*dimostrazione*).

2.1.1 Osservazione

In un modello esponenziale la media campionaria non approssima λ facendo il complemento.

$$E[\overline{X_n}] \simeq \frac{1}{\lambda} \text{ ma non è vero che } E[\frac{1}{\overline{X_n}}] \simeq \lambda.$$

2.2 Varianza come stimatore

2.2.1 Media e Varianza del campione incognite

Si utilizza la media campionaria come stimatore non distorto della media e quindi:

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2 \text{ è uno stimatore non distorto della varianza.}$$

2.2.2 Media nota e Varianza incognita

$$\overline{S_n}^2 := \frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^{n} (X_i - E[X_i])^2 \text{ è uno stimatore non distorto della varianza.}$$

2.3 Stimatori dei minimi quadrati: a e b come stimatore di α e β di un modello di regressione lineare semplice

Per stimare α, β si utilizzano gli a, b trovati nella costruzione della retta di regressione:

$$A \sim N\left(\alpha, \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}\right) = \overline{Y} - B\overline{x} \text{ come stimatore di } \alpha.$$

$$B \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i * Y_i) - n\overline{x}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2) - n\overline{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

come stimatore di β.