Variabile aleatoria chi quadrato con N gradi di libertà

Leonardo Bizzoni

May 4, 2024

Una variabile aleatoria $Y \sim \chi^2(n)$ con n gradi di liberatà è una variabile aleatoria assolutamente continua dove $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ dove $Z_1, \ldots, Z_n$ sono variabili aleatoria idipendenti identicamenete distribuite e $Z_i \sim N(0,1)$. I gradi di libertà della χ^2 rappresentano la cardinalità del campione $Z_1, \ldots, Z_n$.

Formule:

- Valore medio: $E[Y] = n$
- Varianza: $Var[Y] = 2n$

1 Proposizione

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione aleatorio estratto casualmente da una popolazione con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. Possiamo affermare che:

- $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$ questo perchè $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ per la standardizzazione di variabili aleatorie normali.
- $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X_n}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$ utilizzando uno stimatore non distorto della media come la media campionaria $\overline{X_n}$ si perde un grado di libertà.
- Moltiplicando il rapporto tra la varianza σ^2 e lo stimatore $S_n^2 = \frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2$ per $(n-1)$ abbiamo che $(n-1) * \frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

2 Osservazione

Nel caso particolare in cui $n = 2$ allora $Y \sim Exp(\frac{1}{2})$, mentre per n grande vale l'approssimazione data dal Teorema del limite centrale $\chi^2(n) \sim N(n, 2n)$.