Vettori aleatori

Leonardo Bizzoni

April 6, 2024

In molte circostanze siamo interessati allo studio congiunto di 2+ variabili aleatorie relative allo stesso spazio di probabilità $(\Omega, P) := \begin{cases} X :\ \Omega \to \mathbb{R} \\ Y :\ \Omega \to \mathbb{R} \end{cases}$, la coppia (X, Y) è detta **vettore aleatorio** (*di cardinalità 2*):

$$(X, Y) :\ \Omega \to \mathbb{R}^2$$

1 Vettori aleatori discreti

(X, Y) si dice discreto se i valori che può assumere sono contenuti in un insieme finito o numerabile (x_i, y_j). Ovvero tutte le variabili aleatorie del vettore devono essere variabili aleatorie discrete.

Si definisce la **densità discreta congiunta**:

$$p_{(X,Y)}(x_i, y_j) := P(X = x_i,\ Y = y_j)$$

Sapendo le densità discreta congiunta è possibile ricavare la densità discreta *marginale* delle variabili aleatorie che compongono il vettore aleatorio:

$$\forall x_i \in X(\Omega) \text{ si ha che } p_X(x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} p_{(X,Y)}(x_i, y_j)$$

Formule:

- Valore medio: $E[XY] = \displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} x_i * y_j * p_{(X,Y)}(x_i, y_j)$

2 Vettori aleatori assolutamente continui

(X, Y) si dice assolutamente continuo se esiste una funzione $f_{(X,Y)}(x, y) \geq 0$ detta **densità congiunta** di X e Y tale che:

$$P(X \in [s,t], Y \in [u,v]) = \int_s^t \left(\int_u^v f_{(X,Y)}(x,y)\ dy \right)\ dx$$

Sapendo le densità congiunta è possibile ricavare la densità *marginale* delle variabili aleatorie che compongono il vettore aleatorio:

$$\forall x_i \in X(\Omega) \text{ si ha che } f_X(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x_i,y)\ dy$$

Formule:

- Valore medio: $E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x * y * f_{(X,Y)}(x,y)\ dx\ dy$