Variabile aleatoria normale (o Gaussiana)

Leonardo Bizzoni

May 4, 2024

1 Variabili aleatorie normali standard

Una variabile aleatoria Z si dice **normale standard**, indicata con $Z \sim N(0,1)$, se è assolutamente continua con densità:

$$\forall z \in \mathbb{R} \; f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Il valore medio è 0, mentre la varianza è 1 (*come indicato da* $N(0,1)$).

Dato un intervallo $[s,t] \in [0,\infty)$ non è calcolabile $P(Z \in [s,t]) = \int_s^t f_Z(z)\ dz$, si utilizza invece la funzione di ripartizione di Z, indicata con Φ:

$$\forall z \in \mathbb{R} \; \Phi(z) := F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\ dt$$

I valori di Φ sono riportati in una tabella, non essendo possibile calcolare esplicitamente l'integrale. I valori negativi di Φ si ricavano con la formula: $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

Quindi, per calcolare la probabilità nell'intervallo $[s,t]$:

$$P(Z \in [s,t]) = F_Z(t) - F_Z(s) = \Phi(t) - \Phi(s)$$

2 Variabili aleatorie normali generiche

Una variabile aleatoria X si dice **normale** con media μ e varianza σ^2, indicata con $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, se è assolutamente continua con densità:

$$\forall x \in \mathbb{R} \; f_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Proprietà:

- Se X è normale allora anche $Y := aX + b$ è normale $\forall a \neq 0, b \in \mathbb{R}$.
- $X(\mu_x, {\sigma_x}^2), Y(\mu_y, {\sigma_y}^2)$ normali indipendenti allora anche $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, {\sigma_x}^2 + {\sigma_y}^2)$ è normale.

2.1 Standardizzazione di normali generiche

Da una variabile aleatoria X normale ci si può sempre ricondurre ad una normale standard $Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Anche il contrario è vero, data una variabile aleatoria Z normale standard ci si può sempre ricondurre ad una normale generica $X := \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$.