Funzione di Ripartizione

Leonardo Bizzoni

April 17, 2024

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

La funzione di ripartizione $F_X(x) := P(X \leq x)$ è una funzione che associa ad ogni numero reale, la probabilità che la variabile aleatoria (*di qualsiasi tipologia*) assuma un valore minore uguale al valore dato in ingresso.

La funzione di ripartizione è legata alla densità discreta / densità di X:

$$F_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in (-\infty, x]} p_X(x_i) & \text{se X è discreta} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt & \text{se X è assolutamente continua} \end{cases}$$

1 Osservazione

Se F_X è **costante a tratti** allora X è una variabile aleatoria discreta, e:

- I valori assunti da X sono i punti di discontinuità di F_X.
- La densità discreta $p_X(x_i)$ è l'ampiezza del salto di F_X ($p_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X({x_i}^-)$).

Se F_X è una funzione **continua** e **derivabile a tratti** allora X è una variabile aleatoria assolutamente continua, e:

- la densità di X è data dalla derivata della funzione di ripartizione: $f_X(x) = (F_X)'(x)$ (*nei tratti in cui è derivabile*)

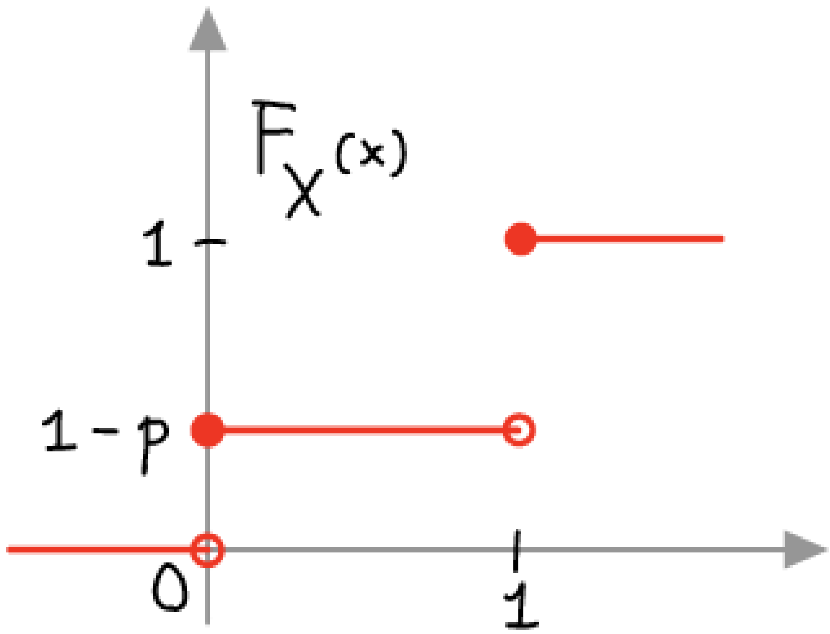
2 Esempi

2.1 Con variabile aleatoria di Bernoulli

Sia $X \sim Be(p)$ con $p \in (0,1)$. $X(\Omega) = \{0,1\},\ p_X(0) = 1-p,\ p_X(1) = p$

Allora $F_X(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$ ovvero:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ 1 - p \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

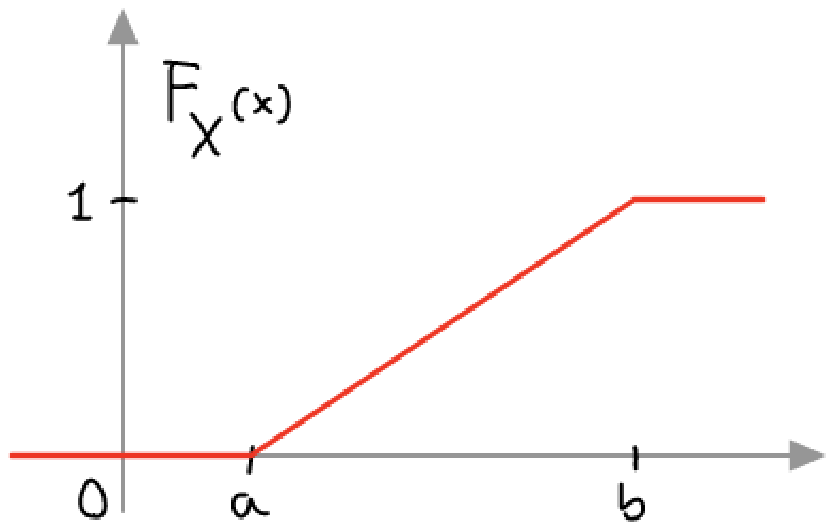


2.2 Con variabile aleatoria uniforme

Sia $X \sim U(a, b)$. $X(\Omega) = [a, b]$, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ se } x < a \cup x > b \end{cases}$

Allora $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$ ovvero:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ se } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ se } x > b \end{cases}$$


$F_X(x)$
1
0
a
b