Valore medio di variabile aleatoria - Expected Value

Leonardo Bizzoni

March 29, 2024

1 Per variabili discrete

Sia X una variabile aleatoria discreta che assume una quantità finita di valori $x_1, x_2 \ldots, x_n$. Si definisce il **valore medio** di X:

$$E[X] := \sum_{i=1}^{n} x_i * p_X(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i * P(X = x_i)$$

Per X variabile aleatoria discreta con quantità infinita $x_1, x_2 \ldots$ si definisce il valore medio:

$$E[X] := \sum_{i=1}^{\infty} x_i * p_X(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i * P(X = x_i)$$

La serie deve convergere assolutamente.

Proprietà:

1. $\forall c \in \mathbb{R},\ E[X + c] = E[X] + c$.
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ E[c * X] = c * E[X]$.
3. X, Y variabili aleatorie che dipendono dallo stesso esperimento aleatorio, allora $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.
4. Monotonia: se $X \geq 0$ allora $E[X] \geq 0$.
5. Formula di trasferimento: $E[f(X)] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) * p_X(x_i)$

Dalle prime 2 proprietà si può concludere che il valore medio è un operatore **lineare**.

$E[X]$ non è necessariamente uno dei valori x_i assunti da X.

Supponiamo di poter ripetere l'esperimento aleatorio un numero elavato di volte $N >> 1$. Indichiamo con $X_1, X_2, \ldots, X_N$ le variabili aleatorie nelle ripetizioni dell'esperimento.

Con grande probabilità si ha che $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_N}{N} \simeq E[X]$.

1.1 Esempio

Ripeto il lacio di un D6 regolare e indico con $X_1, X_2, \ldots, X_N$ i risultati dei lanci. Quindi per ogni $1 \leq i \leq N,\ X_i(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con probabilità uniforme.

La media $\overline{X_N} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_N}{N}$ è una nuova variabile aleatoria e se N è grande, i suoi valori tendo a concentrarsi in prossimità del valore medio $E[X]$.

2 Per variabili assolutamente continue

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x * f_X(x)\ dx$

Le proprietà del valore medio per variabili discrete continuano a valere.