Densità discreta - Distribuzione di Probabilità

Leonardo Bizzoni

March 27, 2024

Ad ogni variabile aleatoria discreta X possiamo associare la funzione $p_X : \mathbb{R} \to [0,1],\ p_X(x_i) := P(X = x_i)$. Ovvero una funzione che, dato in ingresso un valore della variabile aleatoria, restituisce la sua probabilità.

Proprietà:

- $p_X(x) = P(X = x) = 0$ sse x non è un valore assunto da X.
- $\forall i,\ p_X(x_i) \geq 0$
- $\displaystyle\sum_{i \geq 1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$ perchè gli eventi $\{X = x_i\}$ sono disgiunti e partizionano lo spazio Ω.
- $P(Y \in B) = \displaystyle\sum_{x_i \in Y} p_Y(x_i)$ con $B \subseteq X$.

1 Esempi

1.1 Con probabilità uniforme

Estraggo casualmente una famiglia con 2 figli/figlie. Indichiamo con X il numero di figli **maschi**. Che valori può assumere X? Con quali probabilità?

$\Omega = \{\text{MM,MF,FM,FF}\}$ con P uniforme. Allora $X : \Omega \to \mathbb{R}$ è definita da: $X(\text{MM}) = 2, X(\text{MF}) = X(\text{FM}) = 1, X(\text{FF}) = 0$.

Quindi $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ con:

- Non hanno figli maschi: $P(X = 0) = P(\{\text{FF}\}) = \frac{1}{4}$
- Hanno 1 figlio maschio: $P(X = 1) = P(\{\text{MF}\}) + P(\{\text{FM}\}) = \frac{1}{2}$
- Hanno 2 figli maschi: $P(X = 2) = P(\{\text{MM}\}) = \frac{1}{4}$

Perciò:

- $p_X(0) = p_X(2) = P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$
- $p_X(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$

1.2 Con probabilità non uniforme

Lacio 2 monete truccate, che danno test con probabilità $p \in [0, 1]$ fissata. Sia $X :=$ numero di teste.

$\Omega = \{\text{TT,TC,CT,CC}\}$ con $P(\{\text{TT}\}) = p^2$, $P(\{\text{CT}\}) = P(\{\text{TC}\}) = p(1-p)$, $P(\{\text{CC}\}) = (1-p)^2$. Pertanto $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ e la densità uniforme è:

- $p_X(2) = P(X = 2) = P(\{\text{TT}\}) = p^2$
- $p_X(1) = P(X = 1) = P(\{\text{CT}\}) + P(\{\text{TC}\}) = 2p(1-p)$
- $p_X(0) = P(X = 0) = P(\{\text{CC}\}) = (1-p)^2$