

# Assiomi della Probabilità

Leonardo Bizzoni

March 27, 2024

## 1 Spazio campionario o Spazio degli esiti

Insieme  $\Omega$  che contiene **tutti** i possibili esiti dell'esperimento.

### 1.1 Esempio

Lancio un D6 e osservo il risultato:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Intervisto un campione di 1000 elettori e registro quanti voteranno per il candidato  $A$ :  $\Omega = \{0, 1, \dots, 1000\}$ .

## 2 Eventi

Affermazioni sull'esito dell'esperimento aleatorio, quindi sottoinsiemi  $A \subseteq \Omega$  dello spazio campionario. Essendo gli eventi dei sottoinsiemi si possono applicare tutte le operazioni insiemistiche.

### 2.1 Esempio

Dato  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ :

- $A = \text{"Esce un numero pari"} = \{2, 4, 6\}$ .
- $B = \text{"Esce un multiplo di 3"} = \{3, 6\}$ .
- $C = \text{"Esce un multiplo di 3 o un numero pari"} = A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ .
- $D = \text{"Esce un multiplo di 3 e un numero pari"} = A \cap B = \{6\}$ .

### 3 Probabilità

La probabilità è una qualsiasi funzione  $P : \mathbb{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  (oppure  $[0\%, 100\%]$ ), dove  $\mathbb{P}$  è l'insieme delle parti dello spazio campionario, che soddisfa **opportune proprietà**.

#### 3.1 Interpretazioni della probabilità

##### 3.1.1 Soggettivista

$P(A)$  = prezzo "equo" di una scommessa che paga 1 se si verifica A altrimenti 0.

Esempio:

$A$  = "L'Italia vince i prossimi europei di calcio."  $P(A) = 0.4$ :  
Vendo a 0.41 euro / Acquisto a 0.39 euro la scommessa.

##### 3.1.2 Frequentista

$P(A)$  = frequenza asintotica di volte in cui si verifica A ripetendo l'esperimento.

Esempio:

$A$  = "Una moneta dà testa."  $P(A) = 0.4$ : Lanciando  $N$  volte la moneta, la frequenza di teste è compresa tra 39% ed il 41%.

#### 3.2 Proprietà

1.  $P(\Omega) = 1 = 100\%$
2. Se  $A$  e  $B$  sono eventi disgiunti allora  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Da queste proprietà si deriva che:

- $P(\emptyset) = 0$
- **Regola del complementare:**  $P(\bar{A}) = 1 - P(A), \forall A \subseteq \Omega$
- **Regola dell'addizione di probabilità:**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **Monotonia:** se  $A \subseteq B$  allora  $P(A) \leq P(B)$