

Assiomi della Probabilità

Leonardo Bizzoni

March 27, 2024

1 Spazio campionario o Spazio degli esiti

Insieme Ω che contiene **tutti** i possibili esiti dell'esperimento.

1.1 Esempio

Lancio un D6 e osservo il risultato: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Intervisto un campione di 1000 elettori e registro quanti voteranno per il candidato A : $\Omega = \{0, 1, \dots, 1000\}$.

2 Eventi

Affermazioni sull'esito dell'esperimento aleatorio, quindi sottoinsiemi $A \subseteq \Omega$ dello spazio campionario. Essendo gli eventi dei sottoinsiemi si possono applicare tutte le operazioni insiemistiche.

2.1 Esempio

Dato $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

- $A = \text{"Esce un numero pari"} = \{2, 4, 6\}$.
- $B = \text{"Esce un multiplo di 3"} = \{3, 6\}$.
- $C = \text{"Esce un multiplo di 3 o un numero pari"} = A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$.
- $D = \text{"Esce un multiplo di 3 e un numero pari"} = A \cap B = \{6\}$.

3 Probabilità

La probabilità è una qualsiasi funzione $P : \mathbb{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ (oppure $[0\%, 100\%]$), dove \mathbb{P} è l'insieme delle parti dello spazio campionario, che soddisfa **opportune proprietà**.

3.1 Interpretazioni della probabilità

3.1.1 Soggettivista

$P(A)$ = prezzo "equo" di una scommessa che paga 1 se si verifica A altrimenti 0.

Esempio:

A = "L'Italia vince i prossimi europei di calcio." $P(A) = 0.4$:
Vendo a 0.41 euro / Acquisto a 0.39 euro la scommessa.

3.1.2 Frequentista

$P(A)$ = frequenza asintotica di volte in cui si verifica A ripetendo l'esperimento.

Esempio:

A = "Una moneta dà testa." $P(A) = 0.4$: Lanciando N volte la moneta, la frequenza di teste è compresa tra 39% ed il 41%.

3.2 Proprietà

1. $P(\Omega) = 1 = 100\%$
2. Se A e B sono eventi disgiunti allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Da queste proprietà si deriva che:

- $P(\emptyset) = 0$
- **Regola del complementare:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A), \forall A \subseteq \Omega$
- **Regola dell'addizione di probabilità:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **Monotonia:** se $A \subseteq B$ allora $P(A) \leq P(B)$