Permutazioni

Leonardo Bizzoni

October 26, 2023

Sia X un insieme non vuoto. Allora una funzione $f : X \to X$ biettiva si dice una **permutazione** su X.

Indichiamo con S_X l'insieme delle permutazioni su un insieme X. Se $|X| = n$ con n finito allora l'insieme S_X si indica con S_n ed ha ordine $n!$.

Una permutazione $f \in S_n$ si può scrivere nella forma: $f \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$. Con $1 \leq a_i, b_i \leq n$ e $f(a_i) = b_i$ l'ordine nella prima riga è a cazzo di cane.

Esempio:
$n = 5, f \in S_5$ data da $f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ cioè $f(1) = 2, f(2) = 5, f(3) = 4, f(4) = 3, f(5) = 1$.
Una delle $5! = 120$ permuatazioni è: $f \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Una permutazione $f \in S_n$ **muove** un elemento a se $f(a) \neq a$.
Una permutazione $f \in S_n$ **fissa** un elemento a se $f(a) = a$.

2 permutazioni $f, g \in S_n$ si dicono **disgiunte** se gli elementi mossi da f sono fissati da g. Se f, g sono disgiunte si ha $f \circ g = g \circ f$.

1 Teorema

Ogni permutazione di S_n è un ciclo oppure è il prodotto di cicli disgiunti univocamente determinati a meno dell'ordine.

$$f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 12 & 13 & 6 & 7 & 11 & 2 & 3 & 4 & 10 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$f = (1, 9, 4, 6, 11)(2, 12, 5, 7)(3, 13, 8)$$

Il 10 è fissato da f e quindi non compare nel prodotto di cicli.