Funzione di Eulero

Leonardo Bizzoni

October 25, 2023

La funzione di Eulero $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ è definita da:

- $\varphi(1) = 1$
- $\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq n-1, (k,n) = 1\}|$, per $n \geq 2$ (*Traduzione: la cardinalità dell'insieme dei numeri coprimi compresi tra* 1 *ed* $n-1$)

1 Esempio

$\varphi(8) = |\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq 7, (k,8) = 1\}| = |\{1,3,5,7\}|$ quindi $\varphi(8) = 4$.

2 Proprietà

- Se n è primo allora $\varphi(n) = n - 1$

$\varphi(7) = |\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq 6, (k,7) = 1\}| = |\{1,2,3,4,5,6\}| = 6$

- Se n è primo e $m \geq 1$ allora $\varphi(n^m) = n^m - n^{m-1} = n^{m-1}(n-1)$

$\varphi(7^2 = 49) = 7^2 - 7 = 42$

- La funzione di Eulero è *moltiplicativa*: $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$ con $(a,b) = 1$ si ha che $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

$\varphi(2) = |\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq 1, (k,2) = 1\}| = |\{1\}| = 1$
$\varphi(7) = |\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq 6, (k,7) = 1\}| = |\{1,2,3,4,5,6\}| = 6$
$\varphi(14) = \varphi(7)\varphi(2) = 6$

3 Passaggi per $\varphi(n) = a$ con $a \in \mathbb{Z}$

$\varphi(n) = 116$

① trovare i divisori

$116 = 2^2 \cdot 29$

116	2
58	2
29	29
1	

	2^0	2^1	2^2
29^0	1	2	4
29^1	29	58	116

Quindi i divisori sono:

- $2^0\, 29^0 = 1$
- $2^1\, 29^0 = 2$
- $2^2\, 29^0 = 4$
- $2^0\, 29^1 = 29$
- $2^1\, 29^1 = 58$
- $2^2\, 29^1 = 116$

② $p \in \mathbb{Z}$ primo dispari se $p \mid n$ allora $p-1 \mid \varphi(n)$

$1 \mid 116 \rightarrow p = 2$ (caso speciale dato che 2 è l'unico primo pari e $p-1 = 2-1 = 1 \mid \varphi(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{Z}$)

$2 \mid 116 \rightarrow p = 3$

$4 \mid 116 \rightarrow p = 5$

$\cancel{29 \mid 116 \rightarrow} p = 30$ 30 non è primo

$58 \mid 116 \rightarrow p = 59$

$\cancel{116 \mid 116 \rightarrow} p = 117$ 117 non è primo

$117 = 90 + 27 = 3 \cdot 30 + 3 \cdot 9 = 3 \cdot 39$

③ riscrivere n e $\varphi(n)$

$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 59^d$

$\varphi(n) = 2^{a-1}(2-1)\, 3^{b-1}(3-1)\, 5^{c-1}(5-1)\, 59^{d-1}(59-1) = 116$

$= 2 \quad 3 \; (2) \; 5 \; (4) \; 59 \; (58) = (116 = 2 \cdot 58)$

(7) partendo dal grado con base maggiore trovo per quali valori $\varphi(n) = 116$

$d \leq 1$ perché: - se $d = 0$: $59^{-1} \notin \mathbb{Z}$ (quindi si ignora)* e $\varphi(n) = \ldots = 2 \cdot 58$ potrebbe piacerci

- se $d = 1$: $\varphi(n) = \ldots \cdot 1 \cdot 58 = 2 \cdot 58$ ci piace particolarmente perché $58 = 29 \cdot 2$ e 29 è primo

- se $d = 2$: $\varphi(n) = \ldots \cdot 59 \cdot 58 = 2 \cdot 58$ ci fa schifo

caso $d = 1$:

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 59$$

$$\varphi(n) = 2^{a-1} \, 3^{b-1} (2) \, 5^{c-1} (4) (58) = 2 \cdot 58$$

*

$c = 0$ per forza. (Quando dico che un esponente è 0 significa che la sua base non compare in n e quindi nemmeno in $\varphi(n)$)

Quindi abbiamo:

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 59$$

$$\varphi(n) = 2^{a-1} \, 3^{b-1} (2) (58) = 2 \cdot 58$$

caso $b = 1$:

$$n = 2^a \cdot 3 \cdot 59$$

$$\varphi(n) = 2^{a-1} (2) (58) = 2 \cdot 58$$

caso $a = 0$

$$n = 3 \cdot 59 = 177$$

$$\varphi(n) = 2 \cdot 58 = 2 \cdot 58$$

caso $a = 1$

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 59 = 354$$

$$\varphi(n) = 2 \cdot 58 = 2 \cdot 58$$

caso $b = 0$:

$$n = 2^a \cdot 59$$

$$\varphi(n) = 2^{a-1} (58) = 2 \cdot 58$$

e quindi $a = 2$

$$n = 2^2 \cdot 59 = 236$$

$$\varphi(n) = 2 \cdot 58 = 2 \cdot 58$$

caso $d=0$:

$n = 2^{a} \cdot 3^{b} \cdot 5^{c}$

$\varphi(n) = 2^{a-1}\, 3^{b-1}(2)\, 5^{c-1}(4) = 2 \cdot 58$

$58 = 29 \cdot 2$ e $29 \neq 2^{a-1}\, 3^{b-1}(2)\, 5^{c-1}(4) \ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

questo caso non ha soluzioni

Risultato $n = 177, 236, 354$