

Equazioni Diofantee

Leonardo Bizzoni

October 2, 2023

Un'equazione diofantea è un'equazione della forma:

$$ax + by = c \text{ dove } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ non nulle e } x, y \in \mathbb{Z} \text{ incognite}$$

L'obbiettivo è determinare se esistono e quali sono $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tali che l'equazione è corretta.

Esistono x_0, y_0 sse $\text{MCD}(a, b) | c$ per calcolarli si procede al calcolo dell'MCD e dell'identità di bezout.

Inoltre data un'equazione diofantea è possibile ottenere tutte le possibili soluzioni:

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + \bar{b}k \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \bar{b} = \frac{b}{\text{MCD}(a,b)} \\ y_k &= y_0 - \bar{a}k \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \bar{a} = \frac{a}{\text{MCD}(a,b)} \end{aligned}$$

1 Esempio

$74x + 22y = 10$ quindi $\text{MCD}(74, 22) = 2$ e l'identità di Bezout è $2 = 3a - 10b$ e dato che $10 = 5 * 2$ si ha che $x_0 = 15, y_0 = -50$.

2 Esercizi

$$74x + 22y = 10 \quad \exists x, y \in \mathbb{Z} ? \quad x=15, y=-50$$

$\exists x, y \in \mathbb{Z} : 74x + 22y = 10$ in questo

$$(74, 22) = 2$$

$$a=74 \quad b=22$$

$$2 = 3a - 10b$$

$$10 = 5 \cdot 2 = 5 \cdot (3a - 10b) = 15a - 50b$$

$$74 = 22 \cdot 3 + \frac{66}{8}$$

$$b = a - 3c$$

$$22 = 8 \cdot 2 + \frac{6}{6}$$

$$b = b - 2a + 6c = 7b - 2a$$

$$8 = 6 \cdot 1 + 2$$

$$2 = a - 3b - 7b + 2a = 3a - 10b$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

Tutte le coppie $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 74x + 22y = 10$ nascono da:

$$x_k = x_0 + \frac{b}{d}k = 15 + \frac{22}{2}k = 15 + 11k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$y_k = y_0 - \frac{a}{d}k = -50 + \frac{74}{2}k = -50 + 37k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$2173x + 2491y = 210 \quad \exists x, y \in \mathbb{Z} ?$$

$$a = 2491 \quad b = 2173$$

$$2491 = 2173 \cdot 1 + \frac{2491 + 2173}{318}$$

$$318 = 2173 \cdot 8 + \frac{2173 - 1707}{265}$$

$$318 = 265 \cdot 1 + \frac{216 - 265}{53}$$

$$265 = 53 \cdot 5 + 0$$

$$\begin{array}{r} 53 \cdot \\ 3 \\ 159 + \\ 53 \\ 212 + \\ 53 \\ \hline 265 \end{array}$$

53 \nmid 210

$$258x + 147y = 369 = 3 \cdot 123$$

$$a = 258 \quad b = 147$$

$$\frac{147}{294} \cdot 258 = 147 \cdot 1 + \frac{258-147}{147} \cdot 111 \quad 111 = a - b$$

$$\frac{147}{294} \cdot 147 = 111 \cdot 1 + \frac{147-111}{36} \cdot 36 \quad 36 = 2b - a$$

$$\frac{1}{36} \cdot 111 = 36 \cdot 3 + \frac{111-108}{3} \cdot 3 \quad 3 = a - b - 6b + 3a = 4a - 7b$$

$$\frac{3}{108} \cdot 36 = 3 \cdot 12 + 0 \quad 369 = 123(4a - 7b) = 492a - 861b$$

$$\begin{array}{r} 123 \cdot 4 \\ \hline 492 \end{array} \quad \begin{array}{r} 123 \cdot 7 \\ \hline 861 \end{array}$$

$$x_0 = 492 \quad y_0 = -861$$

$$X_K = x_0 + \bar{b}K = 492 + \frac{147}{3}K = 492 + 49K \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r} 147 \mid 3 \\ \hline 27 \quad 49 \end{array}$$

$$Y_K = y_0 - \bar{a}K = -861 - \frac{258}{3}K = -861 - 86K \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r} 258 \mid 3 \\ \hline 18 \quad 86 \end{array}$$

$$109x + 25y = 12$$

$$a = 109 \quad b = 25$$

$$109 = 25 \cdot 4 + 9 \quad 9 = a - 4b$$

$$25 = 9 \cdot 2 + 7 \quad 7 = b - 2(a - 4b) = 9b - 2a$$

$$9 = 7 \cdot 1 + 2 \quad 2 = 3a - 13b$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \quad 1 = 9b - 2a - 3(3a - 13b) = 48b - 11a$$

$$1 \mid 12 \quad 12 = 12(48b - 11a) = 576b - 132a$$

$$\begin{array}{r} 48 \cdot 12 \\ \hline 576 \\ 11 \cdot 12 \\ \hline 132 \\ \hline 576 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$x_0 = -132 \quad y_0 = 576$$

$$X_K = x_0 + \bar{b}K = -132 + 25K \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

$$Y_K = y_0 - \bar{a}K = 576 - 109K \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

$$18x + 59y = 13$$

$$a=59 \quad b=18$$

$$\begin{array}{l} 18 \cdot \\ \hline 3 \\ 54 \end{array} \quad \begin{array}{l} 59 = 18 \cdot 3 + 5 \\ S = a - 3b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \\ \hline 54 \end{array} \quad \begin{array}{l} 18 = 5 \cdot 3 + 3 \\ 3 = a - 3a \end{array}$$

$$S = 3 \cdot 172 \quad 2 = 4a - 13b$$

$$3 = 2 \cdot 171 \quad 1 = 23b - 4a$$

$$13 = 13(23b - 4a) = 299b - 91a$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 13 \\ \hline 69 \\ 230 \\ \hline 299 \end{array}$$

$$x_0 = 299 \quad y_0 = -91$$

$$x_k = x_0 + b \cdot k = 299 + 18k$$

$$y_k = y_0 - a \cdot k = -91 - 59k$$

con $k \in \mathbb{Z}$

$$153x - 34y = 51 = 17 \cdot 3$$

$$a=153 \quad b=34$$

$$\begin{array}{l} 153 \\ \hline 34 \\ 119 \\ \hline 187 \\ \hline 153 \\ \hline 34 \end{array} \quad \begin{array}{l} 153 = 34 \cdot 4 + 17 \\ 17 = a - 4b \end{array}$$

$$34 = 17 \cdot 2 + 0 \quad 51 = 3a - 12b = 3a + 12(-b)$$

$$x_0 = 3 \quad y_0 = 12$$

$$x_k = x_0 + b \cdot k = 3 + \frac{-34}{17} k = 3 - 2k$$

$$y_k = y_0 - a \cdot k = 12 - \frac{153}{17} k = 12 - 9k$$

con $k \in \mathbb{Z}$

Determinare $K \in \mathbb{N}$ con $K < 70$:

$$8x + 16y = K$$

$$(8, 16) = 8 \quad k = 8 \cdot 8 = 64$$

$$\frac{8x + 16y = 64}{8} \quad \frac{64}{8}$$

$$x + 2y = 8$$

$$x_0 = -8 \quad y_0 = 8$$

$$x_k = x_0 + \bar{a}k = -8 + \frac{8}{8}k = -8 + k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$y_k = y_0 - \bar{a}k = 8 - \frac{8}{8}k = 8 - k$$

