Pumping lemma

Leonardo Bizzoni

December 8, 2023

Lemma usato per dimostrare per assurdo che un linguaggio dato non è regolare.

Sia L un linguaggio regolare. Esiste una costante n (dipendente da L) tale che, $\forall w \in L$ tale che $|w| \geq n$ allora w può essere scomposta come $w = xyz$ in modo che:

- $y \neq \epsilon$
- $|xy| \leq n$
- $\forall k \geq 0$ anche la stringa $xy^k z \in L$

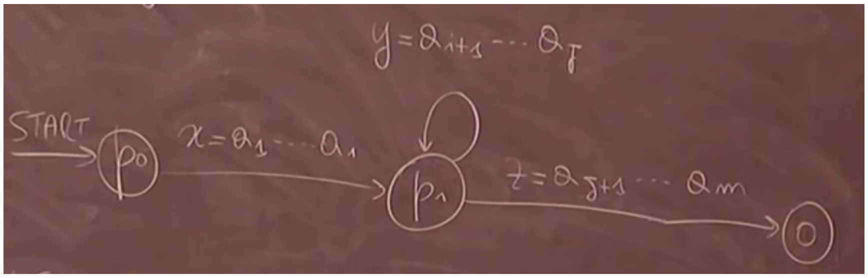
1 Dimostrazione

Se L è regolare allora esiste un DFA A che lo riconosce. Supponiamo che A abbia n stati. Consideriamo una stringa $w = a_1 a_2 a_3 \cdots a_m$ tale che $|w| \geq n$ (quindi $m \geq n$).

$\forall i \in [0..n]$, sia $p_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$. Dato che A ha n stati gli $n+1$ stati $p_0, p_1, \cdots p_n$ non possono essere tutti distinti, allora $\exists i, j \in [0..n] \mid 0 \leq i \leq j \leq n$ tali che $p_i = p_j$.

Scomponiamo $w = xyz$ come segue:

- $x = a_1 \cdots a_i$ che porta allo stato p_i
- $y = a_{i+1} \cdots a_j$ che porta allo stato p_i
- $z = a_{j+1} \cdots a_m$ che porta in una qualche stato accettante



La y non è per forza un cappio ma anche un ciclo che termina in p_i

2 Esercizi

Applichiamo il Pumping Lemma al linguaggio

$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$

Per assurdo se L fosse regolare allora vale il lemma.
Sia allora n la costante menzionata nel lemma e poniamo
$w = 0^n 1^n$.
Allora $w \in L$ e $|w| \geq n$ scomponiamo $w = xyz$ con:

- $x = 0^{n-1}$ $\quad |xy| \leq n$ ✓
- $y = 0$ $\quad y \neq \varepsilon$ ✓
- $z = 1^n$

Poiché valgono le proprietà 1°, 2° e per ipotesi iniziale anche il lemma stesso allora deve valere anche la proprietà 3°.
Non è però verificata la 3° proprietà del lemma $xy^k z \in L \iff k = 1$
Quindi L <u>non</u> è regolare

$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ contiene lo stesso num di 0 e di 1$\}$

$w = 0^n 1^n \in L$ $\quad$ per quanto dimostrato prima questo linguaggio <u>non</u> è regolare

---

$L = \{1^n \mid n$ primo$\}$ $\quad$ es: 11
111
11111
1111111
.....

$|w| = p > n$

$|w| = p \geq n$

$w = xyz$ dove:

- $x = 1^{n-1}$ $(|xy| = n) \leq n$
- $y = 1$ $y \neq \varepsilon$ ✓
- $z = 1^{p-n}$

$w = 1^{n-1} 1^{k} 1^{p-n} \in L \iff k + p - 1$ primo quindi L non è regolare

---

$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid$ stringhe binarie palindrome $\}$

$w = 0^n 1 0^n \in L$ n costante del lemma

$w = xyz$ t.c.:

- $x = 0^{n-1}$ $|xy| = n \leq n$ ✓
- $y = 0$ $y \neq \varepsilon$ ✓
- $z = 10^n$

$w = 0^{n-1} 0^{k} 10^{n} \in L \iff k = 1$ non è regolare