Relazione di congruenza

leo

January 4, 2023

Dato un semigruppo (vale anche per altre strutture) $(S, \circ)$, una relazione di congruenza $\cong$ su S è una relazione di equivalenza che preserva $\circ$.

Cioè $\forall x, y, z \in S, x \cong y$ implica:

$$x \circ z \cong y \circ z$$
$$z \circ x \cong z \circ y$$

1 Esempio 1

Sia $A = \{0, 1\}$ un alfabeto di 2 simboli e A^* l'universo linguistico da esso generato.
Consideriamo il semigruppo $(A^*, \circ)$, dove $\circ$ è la **concatenazione** fra stringhe.
aRb sse a e b hanno lo stesso numero di 1.

Se aRb e $a'Rb'$, si ha che:

- a ha lo stesso numero di 1 di b
- a' ha lo stesso numero di 1 di b'

Quindi $a \circ a'$ ha lo stesso numero di 1 di $b \circ b'$: $(a \circ a') \cong (b \circ b')$

2 Esempio 2 - non congruenza

Sia $(\mathbb{Z}, +), f(x) = x^2 - x$, definiamo aRb sse $f(a) = f(b)$.
R è una relazione di equivalenza, ma non di congruenza infatti:

$$-1R2, -3R4 \text{ ma non è vero che } (-1 + (-3))R(2 + 4)$$