# Prodotto di ordinamenti

Leonardo Bizzoni

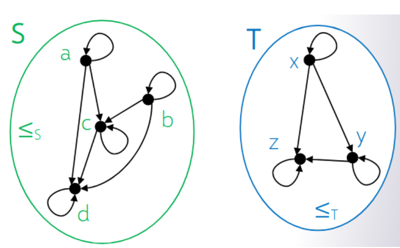
November 19, 2022

Se $(S, \leq)$ e $(T, \leq)$ sono poset, anche $\langle S * T, \leq \rangle$ è un poset con l'ordine parziale definito come:

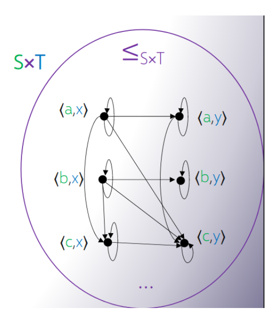
$$\langle s, t \rangle \leq \langle s', t' \rangle \text{ sse } s \leq s' \in S \text{ e } t \leq t' \in T$$

## 1 Esempio generico

$$S = \{a, b, c, d\}$$
$$R(\leq) = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, d\rangle\}$$
$$T = \{x, y, z\}$$
$$R'(\leq) = \{\langle x, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle, \langle y, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle y, z\rangle, \langle z, z\rangle, \langle z, x\rangle, \langle z, y\rangle\}$$




$$(S * T, \leq) = \{\langle\langle a, x\rangle, \langle c, x\rangle\rangle, \langle\langle a, x\rangle, \langle c, y\rangle\rangle, \dots\}$$



## 2 Esempio con ordine lessicografico

Sia $A = \{a, b, c, ... , z\}$ l'insieme che contiene le lettere dell'alfabeto. Sia $A^*$ l'universo costruito su $A$ formato da tutte le sequenze possibili di lunghezza arbitraria di lettere.

Siano $word_1, word_2 \in A^*, word_1\langle a1, a_2, \cdots, a_{len}\rangle, word_2\langle b_1, b_2, \cdots, b_{len}\rangle, m = min(word_{1len}, word_{2len})$.

Definiamo $\leq_{lex} \subseteq A^* * A^*$, dove $word_1 \leq_{lex} word2$ sse: $\langle a_1, a_2, \cdots, a_{len}\rangle \leq_{lex} \langle b_1, b_2, \cdots, b_{len}\rangle$ in $A^m$.

*amo* $\leq_{lex}$ *ara perchè* $m \leq_{lex} r$, *amo* $\leq_{lex}$ *amore perchè* $amo_{len} \leq amore_{len}$, *amo* $\leq_{lex}$ *zero perchè* $a \leq_{lex} z$.