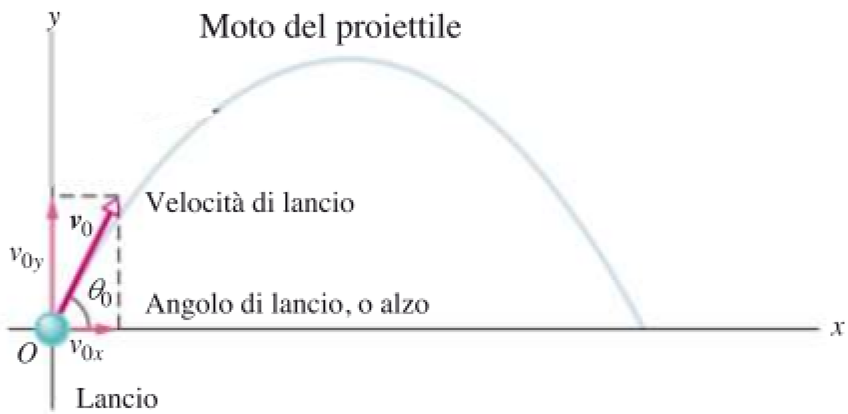
Moto di un proiettile

Leonardo Bizzoni

July 18, 2024

Il moto di un proiettile, in condizioni ideali (*senza aria*), segue la traiettoria:



Il proiettile è lanciato con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ che si può esprimere come:

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} \; v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \; v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

Dove θ_0 è l'angolo con cui è stato lanciato inizialmente il proiettile.

Questo indica che la **traiettoria** del proiettile è **identificata** univocamente dalla **velocità** v_i e dall'**angolo** con cui è stato lanciato θ_i.

1 Osservazione

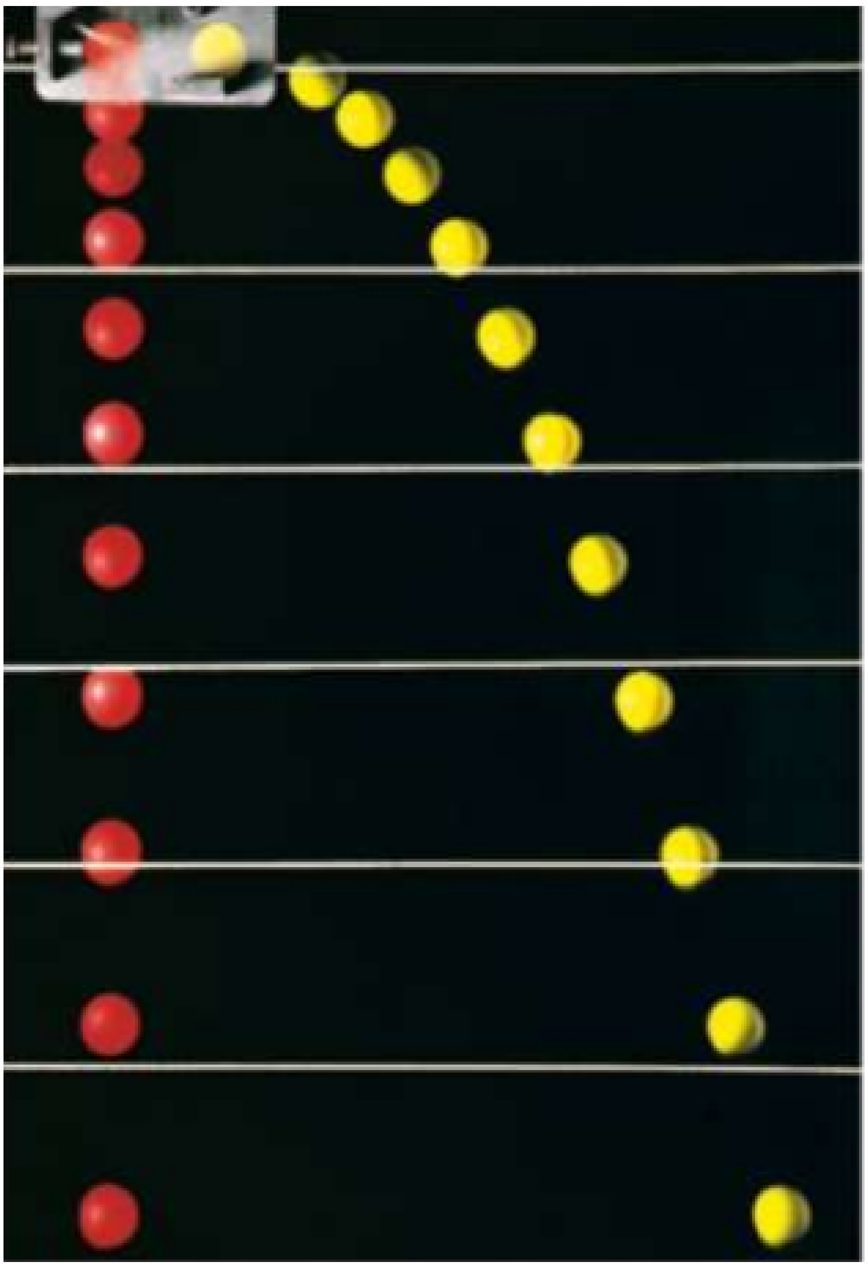
Nel moto del proiettile il **moto orizzontale** ed il **moto verticale** sono **indipendenti** l'uno dall'altro.

Infatti possiamo affermare che:

- il moto orizzontale è rettilineo uniforme in quanto ha velocità $v_{0x}\mathbf{i}$ costante ed accelerazione nulla.

- il moto verticale è rettilineo uniformemente accelerato in quanto ha accelerazione costante $\mathbf{a} = \mathbf{g}$.

1.1 Dimostrazione grafica



A sinistra la palla viene lasciata cadere verticalmente, mentre a destra la palla viene lasciata cadere con una spinta orizzontale.

Come è possibile vedere, nonostante la spinta orizzontale, le 2 palle cadono verticalmente alla stessa velocità. Questo dimostra che i 2 moti sono indipendenti l'uno dall'altro.

2 Formule

Dall'osservazione precedente possiamo dedurre:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} v_{xf} = v_{xi} \\ v_{yf} = v_{yi} - gt \end{cases} = (v_{xi})\mathbf{i} + (v_{yi} - gt)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x_f = x_i + v_{xi} * t \\ y_f = y_i + v_{iy} * t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} = (x_i + v_{xi} * t)\mathbf{i} + (y_i + v_{iy} * t - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}$$

2.1 Traiettoria (verticale) del proiettile

Risolvendo $x_f = x_i + v_{xi} * t$ per il tempo $t = \frac{x_f - x_i}{v_i \cos\theta_i}$ con $y_i = x_i = 0 \rightarrow t = \frac{x_f}{v_i \cos\theta_i}$ possiamo ricavare l'equazione di una parabola per l'origine degli assi:

$$y_f = \frac{v_i \sin\theta_i}{v_i \cos\theta_i} x_f - \frac{g x_f^2}{2v_i^2 \cos^2\theta_i} = (\tan\theta_i)x_f - \frac{g x_f^2}{2v_i^2 \cos^2\theta_i}$$

Quest'equazione è valida sse $0 \leq \theta_i < \frac{\pi}{2}$ dato che $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Nel caso particolare $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ si torna ad un semplice moto rettilineo in caduta libera.

2.2 Gittata (orizzontale) del proiettile

La gittata è la distanza *orizzontale* percorsa dal proiettile misurata nell'istante in cui ritorna alla quota di partenza/lancio e si ottiene dalla formula:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0)$$

2.2.1 Osservazione

Si ha gittata massima quando l'angolo di langio θ è di 45°.