Asintoti

leo

January 6, 2023

1 Asintoto orizzontale

$f : (a, +\infty) \to \mathbb{R} \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$
$f : (-\infty, a) \to \mathbb{R} \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Si dice in questo caso che la retta di funzione $y = l$ è asintoto orizzontale per la funzione per $x \to \pm\infty$.

2 Asintoto verticale

$f : (x_0, a) \to \mathbb{R} \ \lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = \pm\infty$
$f : (a, x_0) \to \mathbb{R} \ \lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = \pm\infty$

Si dice in questo caso che la retta di funzione $x = x_0$ è asintoto verticale per la funzione per $x \to x_0$.

3 Asintoto obliquo

Sia $f : (a, \pm\infty) \to \mathbb{R}$. Si dice che la retta $y = mx + q$ con $m \neq 0$ è asintoto obliquo di f per $x \to \pm\infty$ se:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$
$$f(x) = mx + q + o(1), \text{ con } x \to \pm\infty$$

Per poter esistere un asintoto obliquo:

- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}$

3.1 Esempio 1

$$f(x) = 3x - 2 + e^{-x}$$

La retta $y = 3x - 2$ è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

3.2 Esempio 2

$f(x) = x + \sqrt{x}$
$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = 1$
$q = \lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) - mx = (x + \sqrt{x}) - x = \sqrt{x} = +\infty \notin \mathbb{R}$

La funzione $f(x) = x + \sqrt{x}$ non ha asintoto obliquo.