Funzioni convesse e concave

leo

January 6, 2023

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, si dice che è una funzione convessa su I se $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall t \in [0, 1]$:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

$(1-t)x_1 + tx_2$ prende tutte le x comprese tra gli estremi x_1, x_2. Quindi la funzione calcolata in tutti i punti del segmento x_1, x_2 è $\leq$ della retta passante per gli estremi.

Inoltre si dice che una funzione è concava se $-f(x)$ è convessa.

1 Caratterizzazione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, f derivabile.

f è convessa sse $\forall x_0 \in I$ si ha che $\forall x \in I: \ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. La funzione sta sempre al di sopra della retta tangente passante per qualsiasi punto x_0.

f è concava sse $\forall x_0 \in I$ si ha che $\forall x \in I: \ f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

2 Teorema che effettivamente dobbiamo usare per verificare la convessità

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, f derivabile 2 volte in I.

f è convessa sse $\forall x \in I: \ f''(x) \geq 0$.
f è strettamente convessa sse $\forall x \in I: \ f''(x) > 0$.

---

f è concava sse $\forall x \in I: \ f''(x) \leq 0$.
f è strettamente concava sse $\forall x \in I: \ f''(x) < 0$.

I punti in cui la derivata seconda cambia di segno sono punti di flesso.