Conseguenze Rolle, Cauchy, Lagrange

leo

January 4, 2023

1 Funzioni con derivata nulla su un intervallo

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che:

- f continua in $[a, b]$
- f derivabile in (a, b)

Se $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ allora f è costante in $[a, b]$.

1.1 Dimostrazione

Proviamo che $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ $f(x_1) = f(x_2)$.

Per il teorema di Lagrange sull'intervallo $[x_1, x_2]$ $\exists x_0 \in (x_1, x_2) : f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$ quindi $f(x_1) = f(x_2)$.

2 Funzioni con la stessa derivata su un intervallo

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che:

- f, g continua in $[a, b]$
- f, g derivabile in (a, b)

Se $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a, b)$ allora $f(x) = g(x) + const$.

2.1 Dimostrazione

Sia $h(x) = f(x) - g(x)$, inoltre $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ sappiamo essere $h'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$ quindi $h(x) = const$ di conseguenza $f(x) = g(x) + const$.