Teorema di Cauchy

Leonardo Bizzoni

December 4, 2022

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che:

- f, g continue in $[a, b]$
- f, g derivabili in (a, b)

Allora $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0)[g(b) - g(a)] = g'(x_0)[f(b) - f(a)]$

È una generalizzazione del teorema di Lagrange.

1 Dimostrazione

Sia $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$, $h(x)$ è anch'essa continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).

Dimostriamo che agli estremi $h(a) = h(b)$:

$$h(a) = f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)] = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$
$$h(b) = f(b)[g(b) - g(a)] - g(b)[f(b) - f(a)] = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$
$$h(a) = h(b)$$

Quindi per il teorema di Rolle applicato ad $h(x)$ $\exists x_0 \in (a, b) : h'(x_0) = 0$ e $f'(x_0)[g(b) - g(a)] = g'(x_0)[f(b) - f(a)]$.