Teorema di Fermat

leo

January 4, 2023

Sia $f : I \to \mathbb{R}, I$ intervallo, x_0 interno a I. Se x_0 è un estremante locale ed $\exists f'(x_0)$, allora $f'(x_0) = 0$.

1 Dimostrazione

Sia x_0 di massimo locale, $\exists I_r(x_0) \subset I : f(x) - f(x_0) \leq 0 \forall x \in I_r(x_0)$.

$f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} f_d'(x) \leq 0 \\ f_s'(x) \geq 0 \end{cases}$, poichè $f_d'(x) = f_s'(x) = f'(x) = 0$.

2 Esempio

$f : [1, 4] \to \mathbb{R}, f(x) = \log(x) - \frac{x^2}{4}$ determinare massimi e minimi globali.

Per il teorema di Weierstrass so che esistono i punti di massimo e minimo. Inoltre se i punti di massimo e minimo sono interni all'insieme $(1, 4)$ allora $f'(max) = f'(min) = 0$.

Calcoliamo la derivata: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}$ e cerchiamo dove essa si annulla:

$$\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} = 0 \to x = \pm\sqrt{2}$$

Considero solo il ramo positivo perchè $1 < \sqrt{2} < 4$.

Quindi $x_0 = \sqrt{2}$ è un punto stazionario per il teorema di Fermat.

Una volta trovati i punti stazionari interni all'intervallo si calcola $f(x)$ nei punti stazionari e negli estremi, dato che l'insieme è chiuso.

$f(1) = -\frac{1}{4}$.
$f(\sqrt{2}) = \log(\sqrt{2}) - \frac{1}{2}$ massimo.
$f(4) = \log(4) - 4$ minimo.