Operazioni algebriche su derivate

Leonardo Bizzoni

December 4, 2022

Sia I un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$, derivabili in x_0 allora:

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$
- $g(x_0) \neq 0, (\frac{f}{x})'(x_0) = \frac{f'(x_0)*g(x_0) - f(x_0)*g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

1 Dimostrazione prodotto

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) + [-f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) = 0] - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)[g(x) - g(x_0)] + g(x_0)[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}]$ per la definizione di rapporto incrementale risulta $f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$.

2 Osservazione

Se z è derivabile in x_0 allora: $(cz)'(x_0) = c'z(x_0) + cz'(x_0) = 0 + cz'(x_0)$.

Se $z(x_0) \neq 0$ allora: $(\frac{1}{z})'(x_0) = \frac{-z'(x_0)}{(z(x_0))^2}$