Derivate

Leonardo Bizzoni

December 2, 2022

Sia I un intervallo aperto, $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Supponiamo $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $x_0 + h \in I$.

Se esiste ed è finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-(fx_0)}{h}$ (rapporto incrementale) allora si dice che f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Se esiste ed è finito $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-(fx_0)}{h}$ si dice che f è derivabile da sinistra, scritto $f'_s(x_0)$. Se esiste ed è finito $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-(fx_0)}{h}$ si dice che f è derivabile da destra, scritto $f'_d(x_0)$. Inoltre $\exists f'(x_0)$ sse $\exists f'_s(x_0), f'_d(x_0)$ e $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

1 Osservazione

La derivata può anche essere scritta come: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, dove $x = x_0 + h$ e $h = x - x_0$.

$f'(x) = (\frac{df}{dx})_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = (Df)_{x=x_0} = Df(x_0)$

2 Esempio 1

$f(x) = e^x, x_0 = 2$. Scriviamo il rapporto incrementale: $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{e^{2+h}-e^2}{h}$, calcoliamo $\lim_{h \to 0} \frac{e^{2+h}-e^2}{h} = e^2 * \frac{e^h-1}{h} = e^2 * 1 = e^2$.

La derivata di e^x nel punto $x_0 = 2$ è e^2.

3 Esempio 2

$f(x) = |x|, x_0 = 0$.

Scriviamo il rapporto incrementale: $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h}$, calcoliamo $\lim_{h \to \pm 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, h > 0 \\ -1, h < 0 \end{cases}$. Esistono $f'_s(x_0), f'_d(x_0)$ ma non sono uguali quindi $|x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$.