Proprietà globali delle funzioni continue

leo

January 4, 2023

1 Teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua nel suo dominio (*continua da destra in* a *e continua da sinistra in* b). Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè $\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

1.1 Osservazione

$f[a, b] = [m, M]$

1.2 Esempio

$f(x) = \begin{cases} e^x + 1, x < 0 \\ x^2 + x + 2, 0 \leq x < 4 \\ \ln(x - 4), x > 4 \end{cases}$ $, I = [-1, 5]$, posso applicare il teorema di Weierstrass alla funzione $f(x)$ nell'intervallo I?

$f(0) = \lim_{x \to 0^-} (e^x + 1) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + x + 2) = 2$, continua in $x_0 = 0$.

$f(4) = \lim_{x \to 4^-} (x^2+x+2) \neq \lim_{x \to 4^+} \ln(x-4)$, discontinuità di seconda specie.

La funzione non rispetta le ipotesi del teorema di Weierstrass in quanto nel punto $x_0 \in I = 4$ la funzione non è continua.

2 Teorema degli zeri

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua nel suo dominio. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ o viceversa, allora $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$.

2.1 Dimostrazione

Sia $I = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$ con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. $I \neq \emptyset$ ed è superiormente limitato, quindi $\exists x_0 \in [a,b] : sup(I) = x_0$.

Per assurdo supponiamo che $f(x_0) \neq 0$:

- $f(x_0) < 0$ per il teorema di permanenza del segno $\exists I_r(x_0) : f(x) < 0 \forall x \in I_r(x_0) \cap [a,b]$ ma questo implica che x_0 non è un maggiorante di I perchè esistono punti di $I_r(x_0)$ anch'essi negativi e maggiori di x_0.

- $f(x_0) > 0$ per il teorema di permanenza del segno $\exists I_r(x_0) : f(x) > 0 \forall x \in I_r(x_0) \cap [a,b]$ ma questo implica che x_0 non è il minimo maggiorante in questo esistono altri punti di $I_r(x_0)$ anch'essi positivi ma minori di x_0.

Di conseguenza $f(x_0) = 0$.

2.2 Esempio 1

$e^x + argctg(x) = 0$ ha suluzioni in $(-1, 0]$?

$$f(-1) = \frac{1}{e} - \frac{\pi}{4} < 0$$
$$f(0) = 1$$

Il teorema degli zeri garantisce che nell'intervallo $(-1, 0]$ la funzione si annulla.

2.3 Esempio 2

$f(x) = P_{2k+1}(x)$ *polinomio di grado dispari.*

Questa funzione ha sicuramente dei valori per cui si annulla in quanto definitivamente $f(x) > k$ con $k > 0$ e definitivamente $f(x) < h$ con $h < 0$. Ho quindi costruito un insieme con estremi di segno opposto $[h < 0, k > 0]$. Applichiamo il teorema degli zeri sull'intervallo $[h, k]$:

- $f(h) < 0$ perchè $h < 0$ e f è di grado dispari

- $f(k) > 0$ perchè $k > 0$

Quindi $f(x)$ ha almeno un punto per cui si annulla.

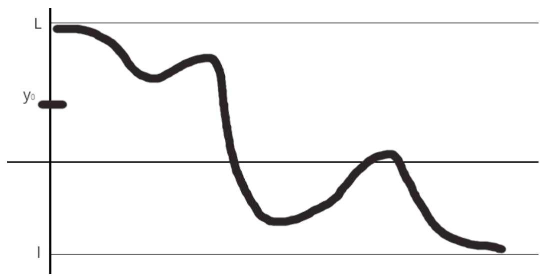
3 Teorema dei valori intermedi

Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funziona continua nel suo dominio e siano $l = inf(f(I)), L = sup(f(I))$.

Allora $\forall y_0, l < y_0 < L \exists x_0 \in I : f(x_0) = y_0$, la funzione assume tutti i valori compresi fra l e L.

3.1 Dimostrazione

Sia $y_0 \in (l, L)$. Poichè $y_0 < L \exists f(x_1) \in f(I) : y_0 \leq f(x_1)$. Poichè $y_0 > l \exists f(x_2) \in f(I) : y_0 \geq f(x_2)$.



Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - y_0$, essendo $f(x_2) \leq y_0 \leq f(x_1)$ risulta:

- $[g(x_1) = f(x_1) - y_0] > 0$
- $[g(x_2) = f(x_2) - y_0] < 0$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri possiamo concludere che $\exists x_0 \in [x_2, x_1] : g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$.

4 Continuità di funzione monotona

Sia I un intervallo $f : I \to \mathbb{R}$ monotona, allora:

- f continua su I
- $f(I)$ è un intervallo

sono equivalenti tra loro.

4.1 Osservazione

Se $I = [a, b], f$ crescente -> f è continua sse $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

5 Teorema di continuità della funzione inversa

Sia $f : I \to \mathbb{R}, I$ è un intervallo, f continua e strettamente monotona. Allora la funzione inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ è anche lei continua.