Limite destro e limite sinistro

Leonardo Bizzoni

December 1, 2022

Sia $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ di accomulazione a destra per D e $f : D \to \mathbb{R}$. x_0 di accomulazione a destra significa che $\exists r > 0 : (x_0, x_0 + r] \cap D \neq \emptyset$.

Si dice che f è continua a destra nel punto x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Sia $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ di accomulazione a sinistra per D e $f : D \to \mathbb{R}$. x_0 di accomulazione a sinistra significa che $\exists r > 0 : [x_0 - r, x_0) \cap D \neq \emptyset$

Si dice che f è continua a sinistra nel punto x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

1 Osservazione

f è continua su D se è continua su <u>tutti</u> i punti di D. Quindi se $\forall t \in D$ risulta $\lim\limits_{x \to t^\pm} f(x) = f(t)$.

2 Esempio 1

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$. *Il più grande intero* $< x$

Prendiamo per esempio $k \in \mathbb{Z}$ e ne calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \to k^+} [x] = k \text{ continua da destra.}$$
$$\lim_{x \to k^-} [x] = k - 1 \neq k \text{ c'è un discontinuità di prima specie.}$$
$$f(x) = [x] \text{ è continua da destra.}$$

3 Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$f(x)$ è continua solo a sinistra, c'è un discontinuità di seconda specie a destra.