Tipi di discontinuità

Leonardo Bizzoni

December 3, 2022

Se $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è continua in un punto x_0 di accomulazione per D si dice che è discontinua. Ci sono 3 tipi di discontinuità:

- Discontinuità eliminabile: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$ ma $f(x_0) \neq l$.
- Discontinuità di primo specie: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ con $l_1 \neq l_2$, $l_1 - l_2$ si chiama salto della funzione in x_0.
- Discontinuità di seconda specie: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ oppure $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

1 Esempio 1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}, 0 < x < 1 \vee x > 1 \\ 0, x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} * \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{8}$$

La funzione $f(x)$ nel punto $x_0 = 1$ assume un valore diverso da quello ottenuto calcolando il limite, si tratta quindi di una discontinuità eliminabile.

2 Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} ax + x^2, x \leq 0 \\ be^x + \sin x - 1, x > 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 0, \lim_{x \to 0^-} (ax + x^2) = 0, \lim_{x \to 0+} (be^x + \sin x - 1) = b - 1.$$

La funzione $f(x)$ è continua nel punto $x_0 = 0 \forall a \in \mathbb{R}, b = 1$.