Criterio del rapporto e della radice di successioni

Leonardo Bizzoni

July 2, 2023

Sia a_n una successioni a termini positivi.
Definiamo $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$, se:

- $l < 1$ allora la successione $a_n \to 0$.
- $l > 1$ allora la successione $a_n \to +\infty$.

Definiamo $b_n = \sqrt[n]{a_n}$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$, se:

- $l < 1$ allora la successione $a_n \to 0$.
- $l > 1$ allora la successione $a_n \to +\infty$.

1 Dimostrazione

Per il teorema della permanenza del segno applicato alla successione $(1-b_n)$, $b_n < 1$ definitivamente.
Quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ definitivamente.
Il teorema sulle successioni monotòne assicura l'esistenza del limite a che deve essere un numero reale non negativo, dato che la successione è decrescente.
Se, per assurdo, $a \neq 0$, passando a $\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, si ottiene $b = \frac{a}{a} = 1$ in contrasto con quanto detto dal teorema $(b < 1)$.
Quindi $a = 0$ di conseguenza $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.