Criterio di Leibniz

Leonardo Bizzoni

November 7, 2022

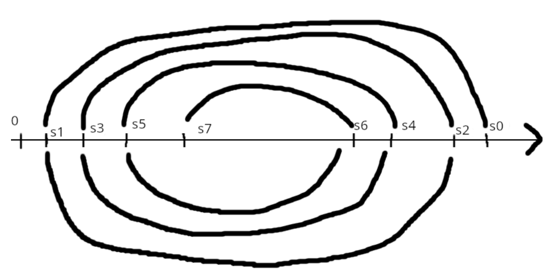
Sia a_n una successione <u>strettamente positiva</u> e supponiamo che:

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$
2. $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ *(monotòna decrescente)*

Allora la serie a segni alternati $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n * a_n$ *è <u>convergente</u>.*

1 Dimostrazione grafica

$s_0 = a_0$
$s_1 = a_0 - a_1$
$s_2 = a_0 - a_1 + a_2$
$s_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$



s_{2k} (indice pari) è decrescente $\to S_1$.
s_{2k+1} (indice dispari) è crescente $\to S_2$.

$s_{2k} - s_{2k-1} = a_{2k} \to S_1 - S_2 = 0 \to S_1 = S_2$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n * a_n = S$.

È possibile **approssimare** S con un margine di errore $< r$.

$S_{2k-1} < S < S_{2k} \forall k$
$|S - s_n| < a_{n+1} < r$

2 Esempio di approssimazione del risultato

$\sum_{n}^{\infty} (-1)^n * \frac{1}{n} = S, r = \frac{1}{10}$
$|S - s_n| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$

Considero solo $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$ che è vericata per $n > 10$, quindi $S_{approssimato} = s_{11} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... - \frac{1}{11}$.

3 Esempio 1

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ *si comporta come* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ *perchè il denominatore è sempre* > 0*, quindi non converge assolutamente, non possiamo dire che la serie di origine diverge (vedi convergenza assoluta).*

$a_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}}$ a questo si applica il criterio di leibniz:

- a_n è strettamente positivo
- $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
- per essere monotona decrescente: $n - \sqrt{n} < n + 1 - \sqrt{n+1} \to 2\sqrt{n} > 0 \forall n \geq 2$, a_n è monotona decrescente.

a_n soddisfa tutti i requesiti quindi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ converge.