# Criterio del rapporto

Leonardo Bizzoni

November 6, 2022

$$\textit{Sia} \sum_{n}^{\infty} a_n \textit{ di termine } \underline{\textit{strettamente positivi}}.$$
$$\textit{Supponiamo che esista} \lim_{n\to+\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

$$\textit{Se } l < 1 \textit{ la serie } \sum_{n}^{\infty} a_n \ \underline{\textit{converge}}.$$
$$\textit{Se } l > 1 \textit{ la serie } \sum_{n}^{\infty} a_n \ \underline{\textit{diverge}}.$$
$$\textit{Se } l = 1 \textit{ non si può concludere nulla.}$$

## 1 Esempio con serie armonica

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{(n+1)^{\alpha}} * n^{\alpha} = 1$

Applicando il criterio del rapporto dimostriamo che non è possibile stabile il carattere di questa serie per $\alpha \in \mathbb{R}$ perchè per $\alpha \leq 1$ diverge e per $\alpha > 1$ converge.

## 2 Esempio 1

$\displaystyle\sum_{n}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \lim_{n\to+\infty} \tfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} * \tfrac{n!}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \tfrac{2}{n+1} = 0$

La serie $\displaystyle\sum_{n}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ <u>converge</u>.

## 3 Esempio 2

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}, \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!} * \frac{(2n-1)!}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n*(2n+1)} = 0$$

La serie $\displaystyle\sum_{n}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$ <u>converge</u>.