Serie telescopiche

Leonardo Bizzoni

November 6, 2022

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie tale che esiste una successione infinitesima b_k per cui $a_k = b_k - b_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Allora risulta: } s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

$$\text{Da cui: } \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = b_1.$$

1 Esempio 1: serie di Mengoli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k*(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 1$$

2 Esempio 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n}) = \sum_{n=2}^{\infty}(\log(n+1) - \log(n))$$

$$a_n = \log(1+\tfrac{1}{n}) = \log(\tfrac{n+1}{n}) = \log(n+1) - \log(n)$$

$$s_n = (\log 3 - \log 2) + (\log 4 - \log 3) + ... + (\log n - \log(n-1)) + (\log(n+1) - \log n) = -\log 2 + \log(n+1) = -\log 2 + \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty$$