Criterio del confronto

Leonardo Bizzoni

November 5, 2022

Per le serie a termine generale non negativo o positivo vale il criterio di confronto.

Siano $\sum_{k}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k}^{\infty} b_k$ 2 serie tali che $0 \leq a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Allora:

- se $\sum_{k}^{\infty} b_k$ converge allora anche $\sum_{k}^{\infty} a_k$ converge.
- se $\sum_{k}^{\infty} a_k$ diverge allora anche $\sum_{k}^{\infty} b_k$ diverge.
- se $\sum_{k}^{\infty} b_k$ diverge allora non posso stabilire nulla per $\sum_{k}^{\infty} a_k$.

1 Dimostrazione

Chiamiamo s_n e t_n le successioni delle ridotte di $\sum_{k}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k}^{\infty} b_k$ rispettivamente.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Essendo entrambe le ridotto di termine generale non negativo o positivo sono di conseguenza crescenti e risulta evidentemente che $s_n \leq t_n \forall n \in \mathbb{N}$. Infatti, se $\sum_{k}^{\infty} b_k$ converge, la ridotta t_n è limitata, quindi lo è anche s_n e la serie $\sum_{k}^{\infty} a_k$ converge a sua volta.

Viceversa, se $\sum_{k}^{\infty} a_k$ diverge, la ridotta s_n è illimitata, quindi lo è anche t_n e la serie $\sum_{k}^{\infty} b_k$ diverge a sua volta.

Ma se è $\sum_{k}^{\infty} b_k$ a divergere, la ridotta t_n è illimitata, ma s_n potrebbe essere limitata o anchessa illimitata non posso stabilire il carattere di $\sum_{k}^{\infty} a_k$ con certezza.