

Teorema sulle successioni monotòne

Leonardo Bizzoni

November 12, 2022

Ogni successione monotòna è regolare. In particolare valgono le seguenti proprietà:

- a_n crescente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup(a_n)$
- a_n decrescente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf(a_n)$
- a_n monotona e limitata $\Rightarrow a_n$ converge

1 Dimostrazione

a_n crescente e limitata.

Posto $l = \sup(a_n)$ e fissato $\epsilon > 0$, per la proprietà dell'estremo superiore $\exists v \in \mathbb{N} : l - \epsilon < a_v$.

Per $n > v$ risulta $a_v \leq a_n$ e dunque:

$$l - \epsilon < a_v \leq a_n \leq l < l + \epsilon$$

da cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$.

a_n crescente e non limitato.

Fissato $M > 0, \exists v \in \mathbb{N} : a_v > M$ e dato che a_n è crescente:

$\forall n > v : a_n \geq a_v > M$ da cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Similarmente si potrebbero dimostrare anche i casi di a_n decrescente limitata e non.