Serie armonica

Leonardo Bizzoni

November 6, 2022

La serie seguente è detta serie armonica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

La serie armonica è positivamente divergente nonstante il limite del termine generale tenda a 0.

1 Dimostrazione

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n \to e (< e) \forall n \geq 1$$
$$\log(1 + \tfrac{1}{n})^n < \log e = 1$$
$$\log(1 + \tfrac{1}{n}) < \tfrac{1}{n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n}) < \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})$$

$+\infty < \lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{n})$ di conseguenza $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ deve divergere (vedi esempio 2 di Serie telescopiche e Criterio del confronto).

2 Generalizzazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $\alpha \leq 0$ la serie diverge, diventa $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha$ ed il $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha \neq 0$.
- Se $0 < \alpha \leq 1$ la serie diverge (vedi esempio 3 di Condizione necessaria per la convergenza di una serie).

- Se $\alpha \geq 2$ la serie <u>converge</u>, per per il criterio del confronto asintotico:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n*(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n*(n+1)} * n^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Ci troviamo quindi nel primo caso del criterio del confronto asintotico quindi le 2 serie hanno lo stesso carattere, la serie di mengoli $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n*(n+1)}$ converge a 1 quindi anche questo caso della serie armonica generalizzata converge ad $S \in \mathbb{R}$.
Se prendiamo un $\alpha > 2$ applicando sempre il criterio del confronto asintotico ci troviamo nel caso in cui $c = +\infty$ e a_n converge quindi la serie armonica generalizzata in questo caso continua a convergere.

- Se $1 < \alpha < 2$ la serie <u>converge</u> applicando il criterio di condensazione.

$\displaystyle\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ha lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{n}^{\infty} (2^n * \frac{1}{(2^n)^\alpha}) = \sum_{n}^{\infty} [\frac{1}{2^{\alpha-1}}]^n$ che è una serie <u>geometrica</u>: <u>converge</u> sse $2^{\alpha-1} > 1$ cioè quando $\alpha > 1$.

2.1 Recap

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$:

- Se $\alpha \leq 1$ la serie <u>diverge</u>.
- Se $\alpha > 1$ la serie <u>converge</u>.

3 Esempio

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge

4 Serie armonica generalizzata $*\frac{1}{\log^b n}$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha * \log^b n}$:

- <u>converge</u> se $\alpha > 1$ e $b \in \mathbb{R}$.
- <u>converge</u> se $\alpha = 1$ e $b > 1$.
- <u>diverge</u> negli altri casi.

4.1 Dimostrazione - non ho capito un cazzo

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha * \log^b n}, \alpha > 0, b \in \mathbb{R}$ è una successione decrescente.

$\sum_{n}^{\infty} 2^n * \frac{1}{(2^n)^\alpha * \log^b 2^n} = \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{2^{n*(\alpha-1)} * n^b}$

- Se $\alpha > 1$: $\sum_{n}^{\infty} [(\frac{1}{2^{+\alpha}})^n * \frac{1}{n^b}]$
  - se $b > 0$: $\sum_{n}^{\infty} [(\frac{1}{2^{+\alpha}})^n * \frac{1}{n^b}] \leq \sum_{n}^{\infty} (\frac{1}{2^{+\alpha}})^n$ <u>converge</u>.
  - se $b < 0$:
    $a_n = (\frac{1}{2^{+\alpha}})^n * \frac{1}{n^b}$, si cerca un b_n tale che $\sum_{n}^{\infty} b_n$ sia convergente e tale che $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.
    $b_n = (\frac{1}{2^{+\alpha-\epsilon}})^n$ è convergente perchè è una serie geometrica di ragione < 1.
    $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2^{+\alpha*n} * n^b} * 2^{(+\alpha-\epsilon)*n} = \frac{2^{-b}}{2^{\epsilon*n}} \to 0$ <u>converge</u>.

4.2 Esempi

$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n * \log n}$, diverge, $\alpha = 1, b = 1$

$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{n} * \log^4 n}$ diverge, $\alpha < 1$

$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n * \log^3 n}$ converge, $\alpha = 1, b = 3$