Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Leonardo Bizzoni

November 6, 2022

Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è convergente, allora la successione* $a_n \to 0$ *per* $n \to +\infty$*.*

Se la successione a_n *non tende a* 0*, allora la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *non può convergere.*

Questo non è vero per il contrario, se $a_n \to 0$ non per forza la serie converge. Un possibile esempio è la serie armonica. Inoltre è verificabile per qualsiasi serie non solo per le serie a termini non negativi.

1 Dimostrazione

Indichiamo con s_n la successione delle somme parziali e con $S \in \mathbb{R}$ la somma della serie.

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = S$$
$$\lim_{n \to +\infty} s_{n-1} = S$$

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} s_n - \lim_{n \to +\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

$$\text{Quindi: } \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

2 Esempio 1

$\sum_{n=1}^{\infty}(2 + \frac{1}{n^2})$, $\lim_{n \to +\infty}(2 + \frac{1}{n^2}) = 2$, quindi la serie <u>diverge</u>.

3 Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 * (n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 * (n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n * (n+1)}$$ (serie di mengoli, vedi Serie telescopiche)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 * (n+1)} < 1$, quindi la serie <u>converge</u>.

4 Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{n}} \geq +\infty$, quindi la serie <u>diverge</u>.