Prodotto interno o prodotto scalare

Leonardo Bizzoni

May 13, 2023

($\langle \_, \_ \rangle$ indica il prodotto interno)

Un prodotto interno in uno spazio vettoriale V ad un campo $\mathbb{K}$ è una funzione $f : V * V \to \mathbb{K}$ tale che:

1. $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$
2. $\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle + \beta \langle v_2, w \rangle$
3. $\langle v, v \rangle > 0$ se $\underline{0} \neq v$

1 Osservazioni

1. - $\langle \underline{0}, w \rangle = \langle 0 * v, w \rangle = 0 * \langle v, w \rangle = 0$
   - $\langle -v, w \rangle = \langle -1 * v, w \rangle = -\langle v, w \rangle$
2. sia $(v_i)_{i=1,\cdots,n} \subset V^n$ una base ordinata di V^n.
   - $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \langle v_i, v_j \rangle \right) = \sum_{i=i}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle v_i, v_j \rangle$
   - È possibile definire una matrice $P := (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\cdots,n}$
   - $\forall v, w \in V^n \ \langle v, w \rangle = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) * P * \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$

2 Norma o lunghezza di vettori

La norma di un vettore $v \in V$ rispetto ad un prodotto interno $\langle \_, \_ \rangle$ è definita come $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

3 Vettori ortogonali e ortonormali

$v, w \in (V, \langle \_, \_ \rangle)$ sono detti **ortogonali** rispetto all'operazione di prodotto interno se $\langle v, w \rangle = 0$.

$v, w \in (V, \langle \_, \_ \rangle)$ sono detti **ortonormali** se sono ortogonali e **normali** cioè la loro lunghezza è $||v|| = ||w|| = 1$.

4 Teorema fondamentale

In ogni $(V^n, \langle \_, \_ \rangle)$ esiste una base ortonormale.