Matrice associata

Leonardo Bizzoni

May 12, 2023

Siano V^n, W^k 2 spazi vettoriali di dimensione n e k inoltre sia $f : V^n \to W^k$.

Fissiamo una base di V : $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ ed una base di W : $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}$.

Una volta stabilita la base del codominio sappiamo che tutti i vettori appartenenti all'insieme delle immagini di f si otterrano facendo:

- $f(v_1) = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i = a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + \cdots + a_kw_k$
- $f(v_2) = \sum_{i=1}^{k} b_i w_i = b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3 + \cdots + b_kw_k$
- $\cdots$
- $f(v_n) = \sum_{i=1}^{k} n_i w_i = n_1w_1 + n_2w_2 + n_3w_3 + \cdots + n_kw_k$

I coefficienti vanno a formare la **matrice associata** k righe $* \, n$ colonne:

$$A_f(v_j, w_i) = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & n_2 \\ \vdots & & & \\ a_k & b_k & \cdots & n_k \end{bmatrix} \right)$$

1 Definizione

La matrice $A_f(v_j, w_i)$ è detta matrice associata ad f e alla scelta di basi ordinate v_j e w_i.

Sia $z \in V^n$ per ricavare $f(z) \in W^k$ ci sono 3 passaggi:

- conoscendo una base di V possiamo riscrivere z come cominazione lineare $z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$
- avendo a disposizione la matrice associata possiamo affermare che f è lineare e quindi $f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j * \left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij} w_i\right)$
- $\beta_i := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij},\ f(z) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i$ da cui si ricava che dio è porco e che $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = A_f(v_j, w_i) * \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$

2 Composizione di funzioni lineari

Date 2 funzioni lineari $f : V \to W,\ g : W \to U$ la funzione composta $g \circ f : V \to U$ è uguale al prodotto delle 2 matrici associate.

$$g \circ f : V \to U = A_g(w_j, u_i) * A_f(v_s, w_j)$$