Isomorfismi di spazi vettoriali

Leonardo Bizzoni

May 4, 2023

Dati 2 spazi vettoriali V, W ed una funzione lineare $f : V \to W$. f è detto **isomorfismo** se è biettivo.

Gli spazi vettoriali V, W sono detti **isomorfi** se esistono 2 funzioni $f : V \to W$, $g : W \to V$ entrambe lineari tali che $g \circ f = id_V$ e $f \circ g = id_W$. È inoltre vero che V e W sono isomorfi sse $\dim(V) = \dim(W)$.

1 Esempi

1.1 Funzioni costanti - tutto il dominio è in relazione con un elemento del codominio

$f : V \to W$ con f costante è una funzione lineare sse $f(V) = 0_W$. In tal caso f si chiama **applicazione nulla**.

1.2 Funzioni identità

$f : V \to V$ è lineare in quanto $\forall v_1, v_2$ si ha che $f(v_1) = v_1,\ f(v_2) = v_2,\ f(\lambda v_1 + \beta v_2) = \lambda v_1 + \beta v_2$.

1.3 Funzioni tra spazi vettoriali di dimensioni diverse

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ovvero $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{bmatrix}\right) = M * \begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{bmatrix}$ dove M è una matrice $m * n$. f è una funzione lineare in quanto $\forall v_1, v_2$ si ha che $f(v_1) = M * v_1,\ f(v_2) = M * v_2,\ f(\lambda v_1 + \beta v_2) = M * (\lambda v_1) + M * (\beta v_2)$.