Applicazioni lineari - Omomorfismi

Leonardo Bizzoni

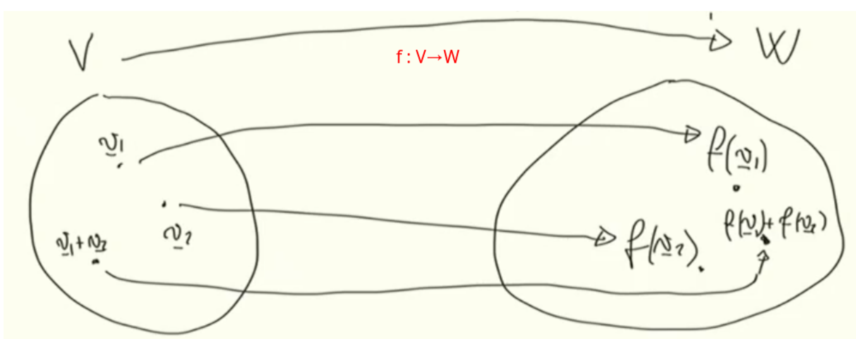
May 11, 2023

Siano V, W due spazi vettoriali sullo stesso campo e $f : V \to W$.
Diremo che f è **lineare** o **omomorfismo** se:

- $\forall \underline{v_1}, \underline{v_2} \in V$ vale $f(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = f(\underline{v_1}) + f(\underline{v_2})$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V$ vale $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$

Da cui:

$$f(\lambda \underline{v_1} + \beta \underline{v_2}) = \lambda f(\underline{v_1}) + \beta f(\underline{v_2})$$



1 Corollario

Fissati 2 vettori $v_1, v_2 \in V$ dato che V, W sono spazi vettoriali e $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2)$ allora sappiamo anche quali sono le immagini di tutte le possibili combinazioni lineari di v_1, v_2.

Inoltre:

1. $f(0_V) = 0_W$.
2. $f(-v) = -f(v)$.

3. se $U < V$ allora $f(U) < W$.

4. se $H < W$ allora $f^{-1}(H) < V$. Se $\{h_i\} \in H$ è un insieme di generatori di H non è detto che $f^{-1}(\{h_i\})$ siano generatori di $f^{-1}(H) < V$.

5. $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\underline{v_i})$ per definizione di linearità dettà all'inizio.

6. $\dim(f(\{v_i \in V\})) \leq \dim(V)$.

1.1 Dimostrazione 3

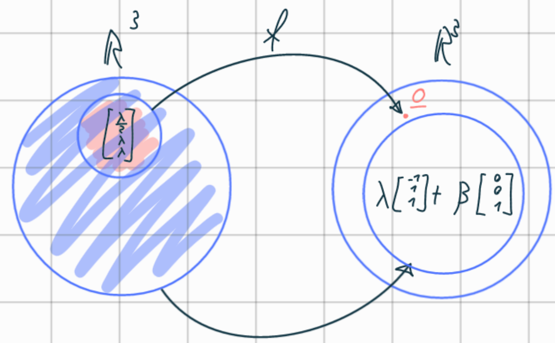
$z_1, z_2 \in f(U)$ quindi $z_1 = f(u_1), z_2 = f(u_2), z_1 + z_2 \in f(U) \leftrightarrow \exists u_3 \in U \mid f(u_3) = z_1 + z_2$ e dato che U è a sua volta uno spazio vettoriale possiamo porre $u_3 = u_1 + u_2$ da cui $f(u_3) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = z_1 + z_2$ e quindi $f(U)$ è uno spazio vettoriale

2 Esericizio

Stabilire se esiste un omomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ed eventualmente determinarlo tale che:

- abbia come nucleo $N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x - z = \emptyset \\ -y + z = \emptyset \end{cases} \right\}$
- $\underline{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Im(f)$

Soluzione:



Verificare che il nucleo sia uno spazio vettoriale:

$$\begin{cases} 2x - z = \emptyset \\ -y + z = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = \emptyset \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ z = y \end{cases}$$

$N = y \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è uno spazio vettoriale?

$$✓ \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\ a+b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ a+b \\ a+b \end{pmatrix} \in N$$

$$✓ \lambda \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} a \\ \lambda a \\ \lambda a \end{pmatrix} \in N$$

$$✓ \underline{0} \in \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

A questo punto scegliamo una base a caso del dominio tale che un suo sottoinsieme sia una base di N:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$$

Mappiamo i 2 vettori della base rimanenti tali che uno abbia $Im = \underline{t}$ e l'altro sia indipendente da $\underline{0}$ e $\underline{t}$ (per il teorema di Grassman)

$\overset{3}{dim}(dom) = \overset{?}{dim}(Im) + \overset{1}{dim}(N)$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left(\underline{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$