matrici invertibili

Leonardo Bizzoni

April 7, 2023

Sia A una matrice quadrata. A è invertibile sse:

$$\exists B : A * B = B * A = Id$$
In tal caso $B = A^{-1}$

1 Teorema

1.1 a

Una matrice A è invertibile sse il suo determinante è $\neq 0$ ed ha quindi rango massimo.

1.1.1 Esempi

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ è invertibile

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ è invertibile

1.2 b

In tal caso, $A^{-1} = (x_{ij})$ è data da:

$$x_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$$

Dove A_{ji} è la sottomatrice ottenuta rimuovendo la j-esima riga e l'i-esima colonna da A.

1.2.1 Esempio

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile. det $(A) = 2$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$:

- $x_{11} = \frac{1}{2}$
- $x_{12} = \frac{1}{2}$
- $x_{21} = -\frac{1}{2}$
- $x_{22} = \frac{1}{2}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2 [Cheat]: Matrici inversa e trasformazioni elementari

Sia A una matrice quadrata. Allora A è invertibile sse $\exists$successioni di trasformazioni sulle righe $T_1, T_2, \cdot\cdot$
$T_k(T_{k-1}(\cdots(T(A)))) = Id$

Da ciò segue che, ponendo $c_i = T_i(Id)$, abbiamo:

$$c_k * \cdots * c_2 * c_1 * A = Id$$
$$\text{Quindi } c_k * \cdots * c_2 * c_1 = A^{-1}$$