Relazioni tra determinante e rango di matrici

Leonardo Bizzoni

April 7, 2023

Non esiste il determinante matrice non quadrate. Possiamo però considerare il determinante di sottomatrici quadrate.

1 Definizione

1.1 1 - Sottomatrice

Una **sottomatrice** di A è una matrice ottenuta rimuovendo righe o colonne di A.

1.2 2 - Minore

Un **minore** di A è il determinante di una sottomatrice quadrata di A. L'ordine del minore è l'ordine di questa sottomatrice quadrata.

2 Teorema 1

Sia A una matrice. Il rango di A è uguale al massimo ordine dei minori non nulli di A.

3 Teorema 2

$\det(B) \neq 0$ sse tutti i vettori riga di B sono linearmente indipendenti.

$\det(B) \neq 0$ sse tutti i vettori colonna di B sono linearmente indipendenti.

4 Esempio

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ determinarne il rango. $\operatorname{rg}(A) = 0, 1, 2, 3$.

Dimostriamo che esiste una sottomatrice $1 * 1$ che ha determinante $\neq 0$ quindi il rango è ≥ 1.
Dimostriamo che esiste una sottomatrice $2 * 2$ che ha determinante $\neq 0$:

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice di A che ha determinante 1 quindi il rango è ≥ 2.

Dal teorema precedente, se esibisco una sottomatrice quadrata di ordine 3 con determinante $\neq 0$, ho dimostrato che $\operatorname{rg}(A) = 3$. Nel caso $B =$ sottomatrice di A ha $\det(B) = 0$ non posso concludere niente, poichè magari c'è un'altra sottomatrice B di ordine 3 con determinante $\neq 0$.