Formula di Laaplace (La+)

Leonardo Bizzoni

April 4, 2023

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n * n$. Denotiamo con A_{ij} la **sottomatrice** ottenuta eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna da A.

$$A = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

1 Teorema/definizione

1.1 Sviluppo lungo l'i-esima riga

$$\det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} * \det(A_{ij})$$

1.2 Sviluppo lungo la j-esima colonna

$$\det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} * \det(A_{ij})$$

1.3 Osservazione

Per ridurre i calcoli si sceglie una riga o colonna con tanti 0 per sviluppare il determinante.

1.4 Corollario

Sia A^t la matrice trasposta di A, cioè la matrice che ha come righe le colonne di A. Allora $\det\left(A^t\right) = \det(A)$.

Applicando permutazioni elementari il determinante cambia:

1. permutazioni di 2 righe: il determinante cambia di segno
2. moltiplicazione per scalare $\lambda \neq 0$: il determinante viene moltiplicato per lo scalare
3. sostituzione riga con simma tra la riga e un'altra: il determinante non cambia

2 Altre proprietà

- In generale $\det(A+B)$ non è esprimibile in funzione di $\det(A)$ e $\det(B)$.
- **Teorema di Binet**: $\det(A*B) = \det(A) * \det(B)$
  - **Corollario**: Sia A invertibile, allora $\det\left(A^{-1}\right) = \det\left(\frac{1}{\det(A)}\right)$, in particolare $\det(A) \neq 0$.

3 Esempio

Matrice diagonale: $\det_n\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & & \\ 0 & a_{22} & 0 & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Matrice triangolare: $\det_n\left(\begin{bmatrix} a_{11} & * & & \\ 0 & a_{22} & * & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$\det_2\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = (-1)^{1+1} a * (\det_1(d) = d) + (-1)^{1+2} b * c = ad - bc$

$$\det_3\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = a_{11} * \det_2\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) - a_{12}\det_2\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right) + a_{13} * \det_2\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right) =$$

$$a_{11} * (a_{22} * a_{33} - a_{23} * a_{32}) - a_{12} * (a_{21} * a_{33} - a_{31} * a_{23}) + a_{13} * (a_{21} * a_{32} - a_{31} * a_{22})$$