# Trasformazioni elementari (su righe) - Eliminazione di Gauss

Leonardo Bizzoni

May 1, 2023

## 1 Definizione

Data una matrice $A$ ci sono 3 tipi di **trasformazione elementare** che **non** cambiano il rango della matrice:

1. Scambiare 2 righe
2. Moltiplicare una righa per $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$
3. Siano $r_i, r_j$ con $i \neq j$ 2 righe di $A$. Rimpiaziamo $r_i$ con $r_i + \lambda r_j$

### 1.1 Corollario

Sia $T$ una trasformazione elementare. Allora $\mathrm{rg}(T(A)) = \mathrm{rg}(A)$.
Inoltre $T(A) = T(Id) * A$

## 2 Esempio

Sia $A = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right)$

- $r_2 = r_2 + (-2r_1) \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

- $r_3 = r_3 + (1r_1) \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right)$$

- $r_3 = r_3 + (-\frac{1}{3}r_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 6 \end{bmatrix}\right)$$

$A$ è diventata una **matrice a scala** ed a questo sappiamo che il rango della matrice è iniziale è uguale al numero di righe non nulle. $\mathrm{rg}(A) = 3$

## 2.1 Osservazione

Siccome abbiamo operato sulle righe, i rapporti di dipendenza/indipendenza lineare **sulle colonne** vengono mantenuti.