Soluzioni di sistema di equazioni lineari

Leonardo Bizzoni

April 2, 2023

Dato un sistema di equazioni lineari $A\underline{x} = \underline{b}$, dove A è una matrice **incompleta**. Possiamo parlare di **soluzione** di un sistema di equazioni lineari $\underline{c} \mid A * \underline{c} = \underline{b}$.

1 Proposizione

Se A è una matrice invertibile ($\exists A^{-1}$ la matrice inversa) allora il sistema ha una unica soluzione.

$$\begin{gathered} A\underline{x} = \underline{b} \\ A^{-1} * A\underline{x} = \underline{b} * A^{-1} \\ Id * x = A^{-1} * \underline{b} \\ x = A^{-1} * \underline{b} \end{gathered}$$

1.1 Osservazione

Se $\underline{b} = 0_V$ diremo che il sistema è **omogeneo**.

2 Teorema di Rouche-Capelli

2.1 A

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione sse il rango$(A) =$ rango$(A|\underline{b})$.

2.2 B

Nel caso il sistema abbia soluzione, l'insieme V di tutte le soluzioni è scrivibile come:

$$V = \underline{c} + W = \{\underline{c} + \underline{w} \mid \underline{w} \in W\}$$

dove $\underline{c}$ è una generica soluzione del sistema e $W = \{\text{soluzioni di } A\underline{x} = 0_V\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Se $c \in W$ allora V è uno spazio vettoriale. Inoltre la dimensione di W è: $\dim(W) = n - \text{rango}(A)$ dove n rappresenta il numero di incognite nel sistema lineare.