Basi - comunicazione di uno spazio vettoriale

Leonardo Bizzoni

May 1, 2023

Sia $W < V$ spazio vettoriale.
Ci sono 2 modi per comunicare uno spazio vettoriale:

1. Dato che $W \subset V$, posso dare una definizione implicita dell'insieme W
2. Dato che $W < V$ e quindi $\exists S \subseteq W \mid \langle S \rangle = W$, ciò consiste nel determinare un insieme S **minimale**:

$$\exists S \subset W, \forall v \in S \mid \langle S - v \rangle \neq W$$

1 Definizioni equivalenti

- $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ è una **base** di V
- S è un sistema di generatori per V, $V = \langle S \rangle$ e $\forall v \in S$ linearmente indipendenti
- $\langle S \rangle = V$ e $\forall v \in V,\ \exists! \sum_{i=1}^{n} \lambda_i * v_i = v$
- S è un insieme **minimale** di generatori di V
- S è un insieme **massimale** di vettori linearmente indipendenti di V

1.1 Corollario

Ogni spazio vettoriale che ammette un **sistema finito** di generatori ammette una base.

2 Esempi di base

2.1 Esempio base canonica

$V = \mathbb{R}^n$

$S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è detta **base canonica** di $\mathbb{R}^n$.

Sia $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un generico vettore, se S un generatore di $\mathbb{R}^n$ dobbiamo poter scrivere il vettore dato come risultato della combinazione lineare dei vettori in S: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i * v_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \right)$ allora $\lambda_i = x_i$ quindi S è una base di V.

2.2 Esempio polinomio

$V = \mathbb{R}_{[a]} = \{\text{polinomi in } x\}$

$S = \{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots\}$

Sia $a + bx \in V$ un generico polinomio di primo grado, se S è un generatore di V dobbiamo poter scrivere il polinomio dato come risultato della combinazione lineare dei polinomi in S: $a + bx = \left(\sum_{i=1}^{2} \lambda_i * v_i = \lambda_1 * 1 + \lambda_1 * x \right)$ allora $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_{i>2} = 0$ quindi S è una base di V.

2.3 Esempio esercizio tipico

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$. Otteniamo una base di $\mathbb{R}^3$ da S.

- Se i vettori di S sono linearmente indipendenti allora per il teorema di estensione ad una base S è una base
- Se S non è una base allora la dimensione dello spazio vettoriale che genera $\langle S\rangle \leq 2$:
  - Se $\dim(\langle S\rangle) = 2$ allora 2 dei 3 vettori di S sono linearmente indipendenti
  - Se $\dim(\langle S\rangle) = 1$ allora solo un vettore $v \in S$ è linearmente indipendente e gli altri 2 sono lo stesso vettore moltiplicato per uno scalare:
    * $z = \lambda * v$
    * $w = \alpha * v$

Chiaramente non siamo nell'ultimo caso, verifichiamo di non poter scrivere uno dei 3 vettori come combinazione lineare degli altri 2:

- $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i * v_i,\ v_i \in S \setminus \{v_1\} = \lambda_1 * \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + \lambda_2 * \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\lambda_1\\-\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda_2\\2\lambda_2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_2\\\lambda_1+2\lambda_2\\-\lambda_1\end{bmatrix} \to \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$
- $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i * v_i,\ v_i \in S \setminus \{v_2\} = \lambda_1 * \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \lambda_2 * \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\2\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda_2\\2\lambda_2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\2\lambda_2\\2\lambda_1\end{bmatrix} \to \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$
- $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i * v_i,\ v_i \in S \setminus \{v_3\} = \lambda_1 * \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \lambda_2 * \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\2\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\lambda_2\\-\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\2\lambda_1-\lambda_2\end{bmatrix} \to \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

(*Ho fatto tutti i casi per completezza ma in generale se un vettore è il risultato di combinazione lineare anche gli altri lo saranno, a meno di vettori multipli e quindi linearmente dipendenti, altrimenti sarebbero tutti e 3 indipendenti*)

Dai calcoli fatti $S \setminus \{v \in S\}$ è una base di $\langle S \setminus \{v \in S\} \rangle$ in quanto è un insieme di vettori linearmente indipendenti e per il teorema di estensione ad una base possiamo unire al nostro insieme di vettori linearmente indipendenti un $g \in$ Generatori per formare una base di $\mathbb{R}^3$.

Sia $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Consideriamo $S' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ e verifichiamo che $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i * v_i = 0_V$(*vedi lemma dipendenza/indipendenza lineare di vettori*):

$$\lambda_1 * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

S' è un insieme di vettori linearmente indipendenti.
$|S'| = 3$ e quindi per il colorrario di dimensione è anche un generatore di $\mathbb{R}^3$.

3 Teorema di estensione o completamento ad una base

Sia $I = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V. Sia $G = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ un insieme di generatori di V.

Allora $\exists G' \subset G : I \cup G'$ è una base di V.

3.1 Osservazione

$|I| \leq |G|$

3.2 Corollario

Se G è un sistema finito di generatori di V, allora ogni base di V ha lo stesso numero di elementi.