Dipendenza e indipendenza lineare di vettori

Leonardo Bizzoni

May 1, 2023

Sia $S < V$ (S sottospazio vettoriale di V).

I vettori di S sono detti **linearmente dipendenti** se $\exists w \in S$ e $S_w = \{z_1, z_2, \cdots, z_h\} \subset S \setminus \{w\}$ tale che $w = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i * z_i$ (w è il risultato di una combinazione lineare). Altrimenti, i vettori di S sono detti **linearmente indipendenti** nessun vettore è il risultato di combinazione lineare di un sottoinsieme di vettori.

Inoltre dato un insieme S linearmente dipendente se **aggiungo** elementi **continua** ad essere linearmente dipendente, se **tolgo** elementi potrebbe diventare linearmente indipendente. Viceversa dato un insieme S linearmente indipendente se **tolgo** elementi **continua** ad essere linearmente indipendente, se **aggiungo** elementi potrebbe diventare linearmente dipendente.

1 Lemma

$S \subset V$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti sse:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i * z_i = 0_V \to \forall i \ \lambda_i = 0$$

Se esiste un'altra combinazione di coefficienti scalari tali che la combinazione lineare ha come risultato 0_V allora S è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

2 Esempio

$S \subset \mathbb{R}^3 = \{v_1, v_2, v_3\} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \}$ usando il lemma stabilire se S è un insieme di vettori indipendenti.

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i * v_i = 0_V$$
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_V$$
$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

S è un insieme di vettori linearmente indipendenti in quanto $\nexists \lambda \neq 0 \mid \sum_{i=1}^{3} \lambda_i * v_i = 0_V$.