# Spazio vettoriale

leo

March 12, 2023

Sia $V$ un gruppi abeliano e $K$ un campo ($\mathbb{R}$).

Gli elementi di $V$ vengono chiamati **vettori**.
Gli elementi di $K$ vengono chiamati **scalari**.

Essendo $V$ un gruppo abeliano questo implica che:

- $\exists 0_V \in V$ il vettore neutro
- $\forall v \in V, \exists(-v) \in V$ l'elemento opposto
- $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ un'operazione associativa
- $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ l'operazione deve anche essere commutativa

## 1 Definizione

Si dice che $V$ è uno **spazio vettoriale** sul campo $K$ se esistono 2 operazioni su $V$:

- $+ : V * V \to V$:
  - $+(v_1, v_2) = v_1 + v_2$
  - $\forall v \in V$ risulta $0_V + v = v + 0_V = v$
  - $\forall v \in V$ risulta $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$
- Prodotto per scalare (*azione esterna*) $* : K * V \to V$:
  - $*(\alpha, v_V) = \alpha * v_V$
  - $v_V * \alpha = ?$
  - $\forall \lambda_i \in K, \forall v \in V$ risulta $(\lambda_1 + \lambda_2) * v = (\lambda_1 * v) + (\lambda_2 * v)$
  - $\forall \lambda \in K, \forall v_i \in V$ risulta $\lambda(v_1 + v_2) = (\lambda * v_1) + (\lambda * v_2)$

- $\forall \lambda_i \in K, \forall v \in V$ risulta $(\lambda_1 * \lambda_2) * v = \lambda_1 * (\lambda_2 * v)$

Uno spazio vettoriale è quindi una **struttura algebrica** formata da:

- un gruppo abeliano $V$
- un campo $K$
- un'operazione di "azione esterna" $*$

$$(V, K, *)$$

## 1.1 Osservazioni

- $\forall v \in V : 0 * v = 0_V$
- $\forall \lambda \in K : \lambda * 0_V = 0_V$
- $\forall v \in V : (-1) * v = -v$